

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

УДК 539.438:539.12.04

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР И ВОЛН КОНЦЕНТРАЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ В ОТКРЫТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ “МЕТАЛЛ+НАГРУЗКА+ОБЛУЧЕНИЕ”

В.Д. Русов, В.А. Тарасов, С.М. Ушеренко, М.М. Овсянко*
Одесский государственный политехнический университет, Украина;
**НИИ импульсных процессов, г. Минск, Белорусь*

У рамках теорії автохвильових процесів у розподілених кінетичних системах обговорюються результати моделювання механізмів утворення, міграції і взаємодії дефектів і дислокацій у металевій системі, що перебуває під впливом зовнішніх радіаційних і механічних навантажень.

В рамках теории автоволновых процессов в распределенных кинетических системах обсуждаются результаты моделирования механизмов образования, миграции и взаимодействия дефектов и дислокаций в металлической системе, находящейся под воздействием внешних радиационных и механических нагрузок.

Within the framework of the theory of autowave processes in the distributed kinetic systems the results of simulation of mechanisms of formation, migration and interaction of defects and dislocations in a metal system under external radiation and mechanical loads are considered.

В последние годы бурное развитие получила такая дисциплина, как синергетика (или, другими словами, динамика иерархических структур в открытых нелинейных системах), основанная на идеях теорий особенностей, бифуркаций и катастроф [1]. Ее удивительная философская общность порождает принципиальную необходимость обеспечения принципа коэволюции при выборе решения (структуры) в почти “дарвиновской” стратегии исследования открытых систем с диффузией [2], т.е. наследственность (тип уравнения и граничные условия) – изменчивость (топология и величина внешнего возмущения) – отбор решений (с использованием принципов Онсагера или “избыточности производства энтропии” Глендсдорфа-Пригожина [3]). Более того она может предсказывать часто качественно “одинаковую” иерархию переходов в поведении сложных систем различной природы, связанных с понижением симметрии и образованием автомодельных структур [2-5]. Все это, естественно, побуждает искать проявление аналогичных закономерностей и в различных моделях радиационного материаловедения, и, в частности, при моделировании механизмов образования, миграции и взаимодействия дефектов и дислокаций в металлической системе, находящейся под воздействием внешних радиационных и механических нагрузок.

В этом смысле возникает вопрос, который собственно предопределил появление настоящей работы: не являются ли различные представления морфо- и топологии кинетических распределений ра-

диационно-индуцированных дефектов в металлах результатом проявления пространственно-временных диссипативных структур, спонтанно возникающих в открытых системах с нелинейным взаимодействием и диффузией вследствие тьюринговой и/или курдюмовской неустойчивости.

Известно, что макроскопические уравнения движения для смеси химически взаимодействующих и диффундирующих компонент в ограниченном объеме химического реактора получают добавлением к уравнениям диффузии нелинейных локальных источников $f(c)$ (химические реакции):

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = f(C_1, \dots, C_n; l_1, \dots, l_n) + D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

(1) где C_1, \dots, C_n – концентрации n компонент; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – внешние параметры (константы скоростей химических реакций, постоянные (неэволюционирующие) концентрации и др.).

При этом коэффициенты диффузии не столь велики, чтобы на характерных временах протекания реакций успевало проходить полное перемешивание в реакционном объеме. Условия на границе должны допускать существование термодинамической ветви, т.е. стационарного пространственного однородного решения системы уравнений (1).

При анализе стационарного однородного решения, соответствующего термодинамическому равновесию двухкомпонентной системы (1) на устойчивость, Тьюринг показал [6], что при определенных условиях однородное состояние может стать неу-

стойчивым, т.е. при линеаризации системы (1) должны появляться новые коллективные черты поведения - в ответ на сколь угодно малые возмущения она должна переходить в новое неоднородное стационарное состояние. Другими словами, если в системе за порогом этой тьюринговой неустойчивости такое возмущение возникло, то оно будет развиваться без существенного изменения формы, увеличивая лишь амплитуду. В этих условиях можно надеяться обнаружить новое состояние, в котором концентрации реагентов определенным упорядоченным образом распределены в пространстве. Очевидно, что такой переход в реальных системах, подверженных флуктуациям, осуществляется спонтанно, самопроизвольно.

Следует отметить, что возникновение упорядоченности согласно второму закону термодинамики может наблюдаться только в открытой системе. При этом сама реакционно-диффузионная система, в которой переход сопровождается нарушением пространственной однородности термодинамической ветви, должна быть как минимум двухкомпонентной [7]. Такие системы являются простейшими (базовыми в смысле [8]) моделями для выявления диссипативных структур, т. е. пространственной самоорганизации. Тут существенным является то, что анализ систем с большим числом переменных, т. е. более сложных, чем базовые, за некоторым исключением [3,8], не выявляет качественно новых свойств диссипативных структур.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ И ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

В связи с вышесказанным попытаемся сформулировать базовую математическую модель кинетики образования, диффузии и взаимодействия дефектов в металлической системе, находящейся под воздействием внешних радиационных и механических нагрузок, учитывающую важнейшую особенность этого процесса - автокаталитический характер. Последнее является следствием следующего факта. Известно, что с возрастанием приложенного напряжения изначально статические дефекты становятся все более и более подвижными, а их движение в металле приводит к увеличению тепловой энергии [5]. В свою очередь, это все больше увеличивает интегральную численность дефектов, что в определенной мере эквивалентно течению некой экзотермической автокаталитической реакции.

Итак, рассмотрим двумерную реакционно-диффузионную систему, в которой два компонента связаны следующим взаимодействием (в процессе облучения и действия нагрузки на поверхности металла). Обозначим концентрацию первого компонента - межузельные ионы через a . Предполагаем, что a автокаталитически активизирует собственный синтез и синтез второго h , который, в свою очередь, ингибирует синтез первого. В качестве ингибитора в нашей модели выступают вакансии. Пусть a и h зависят от координат x и y и времени t . Причем ингибитор h обладает большей диффузионной подвижностью, чем активатор a (объяснение этому допущению бу-

дет дано ниже).

Рассмотрим скорость изменения a , т.е. da/dt . Это изменение происходит по следующим причинам: 1) подвод в реакционный объем межузельных ионов с постоянной скоростью ρ ; 2) выход части ионов в результате механизмов рекомбинации μa ; 3) диффузия $D_a (\partial^2 a / \partial x^2 + \partial^2 a / \partial y^2)$. Кроме того, известно, что наблюдается автокаталитический процесс. В зависимости от вида процессов автокаталитический синтез активатора может быть описан следующими скоростями образования: ka или ka^2 и т. д. Наконец, промоделируем эффект ингибирования синтеза активатора. Наиболее прямой путь, которым ингибитор может замедлить действие активатора, состоит в понижении концентрации активатора a . Скорость ингибирования можно задать в виде ah . Другая возможность заключается в уменьшении скорости автокатализа. В последнем случае это приводит к выражению вида ka^2/h .

Для интерпретации обсуждаемой в настоящей работе задачи можно использовать кинетическую систему, обладающую перечисленными выше свойствами, которую впервые предложили Гирер и Мейнхардт [9]. Очевидно, что существует некоторый произвол в выводе основных уравнений, поэтому окончательный выбор можно сделать лишь на основе детального анализа экспериментальных данных и обширного литературного материала.

Из линейного анализа на устойчивость уравнений (2), подробно рассмотренного в [9,10], получено условие существования мягкой неустойчивости мод (т.е. условия отсутствия колебаний) для случая произвольно меняющегося ρ (контрольный параметр) и фиксированных значений остальных параметров:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

При этом значения ρ_{\max} и критического параметра ρ_c равны

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \\ \rho_c &= \frac{2\mu D}{(\mu D + 1)^2} - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Для возникновения неустойчивости типа мягкой моды необходимо, чтобы $\rho_c > \rho_{\max}$ [9, 10]. Откуда следует, что

$$D \hbar 2\mu + 1 + 2\sqrt{\mu + 1}, \quad (4)$$

где $D = D_h / D_a$, т.е. образование некой диссипативной структуры наступает в данном случае, только если диффузионная подвижность ингибитора h больше, чем величина аналогичного параметра у активатора

а. Другими словами, чтобы возникла неосциллирующая структура, требуется наличие “дальнодействующего ингибирования” и “короткодействующей активации”.

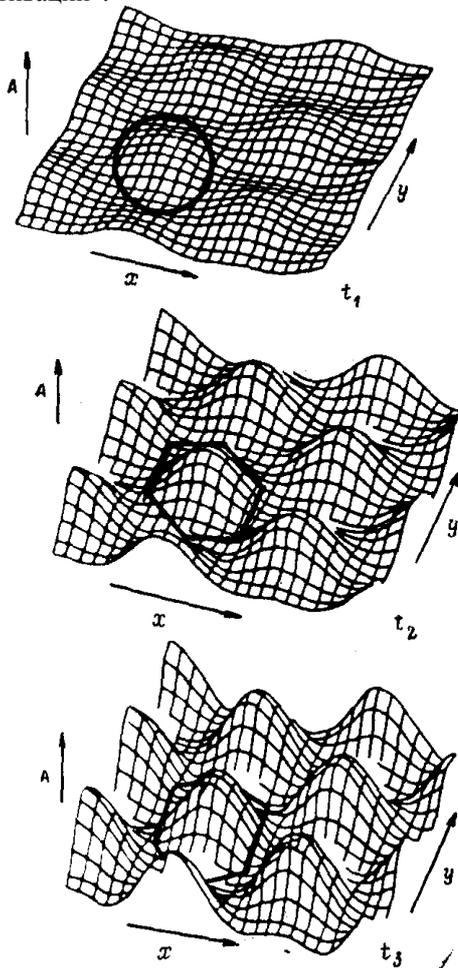


Рис. 1. Возникновение гексагональной пространственной структуры концентрации активатора для трех последовательных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$ [10]. Выделенные области показывают возможную эволюцию проекционной формы отдельной ячейки распределения активатора

Теперь, когда определен для нашей базовой модели с контрольным параметром ρ порог самоорганизации, мы подошли к самому важному моменту для понимания излагаемого подхода. С одной стороны, очевидно, что многообразие механизмов не исчерпывается базовой моделью, так как реальные сценарии образования и взаимодействия дефектов в открытой металлической системе, находящейся под воздействием нагрузки и ионизирующего облучения, много сложнее. Тем не менее существенные медленные движения (мягкие моды) в окрестности порога самоорганизации оказываются нечувствительными к этой сложности, т.е. детали молекулярных механизмов не проявляются в критической динамике. Это означает, что если в реальной многокомпонентной модели удастся выделить два «главных», определяющих компонента и форму базовой модели, то вблизи порога самоорганизации, даже не

зная химизма протекающих процессов, можно предсказать ее поведение [3,8,10].

Базовая модель (2) исследовалась численными методами Гирером и Мейнхардтом [9,11], а также Хакеном [10] с использованием им же разработанных мощных методов исследования динамики гармонических мод - концепции параметра порядка и управляющего принципа. Опуская математические выкладки, которые представлены в [10], приведем и проанализируем очень важные для целей настоящей работы результаты исследований в [9-11].

Рис. 1 иллюстрирует результаты аналитического исследования Хакена базовой модели (2) вблизи точки неустойчивости с различными условиями на границе двумерного слоя, размеры которого равны L_1 и L_2 .

При периодических граничных условиях вид получающейся гексагональной пространственной структуры активатора (для трех последовательных моментов времени) предопределяет форму распределения точечных дефектов. Размеры окрестности или (что то же самое) характерные размеры периодической структуры, хотя и сложным образом зависят от параметров и геометрии системы (при данных граничных условиях), можно оценить на основании выражения (3) для критического значения волнового вектора и соотношения:

$$\left(\frac{\mu}{D}\right)^{1/2} = 4\pi \left(\frac{m_1^2}{L_1^2} + \frac{m_2^2}{L_2^2}\right), \quad \text{где} \quad \frac{m_1^2}{L_1^2} \approx \frac{m_2^2}{L_2^2}.$$

Из этого выражения видно, что в эксперименте размеры областей облучения в металле могут использоваться как управляющие параметры для проведения тестовых исследований.

Поразительные результаты были получены в [9,11] при численном моделировании базовой модели (рис.2). Очевидно, что в процессе образования диссипативных структур могут образовываться усики в виде ионных кластеров, причем “кратер” в основании концентрационного “усика” будет соответствовать “кратеру” в основании «ионной» нити на поверхности металла. Кроме такого важного с экспериментальной точки зрения факта существования “кратера” ясно ощущается ингибирующий эффект по отношению к процессу растворения металла на большое расстояние от центрального “усика” ионов, т. е. от “очага” восстановления.

С другой стороны, демонстрацией описательной силы модели активатор-ингибитор является следующее свойство, наглядно прогнозирующее нетривиальный так называемый “инфекционный” эффект, который может проявляться в виде солитоноподобной концентрационной волны дефектов, движущейся со скоростью, намного превышающей диффузионную. Это следует из фазового портрета базовой системы (2) в модификации Мейнхардта [12], где уже при больших (а не малых!) возмущениях происходят и большие изменения в значениях концентраций компонент, прежде чем они вернутся к своим стационарным значениям. При этом существует определенное пороговое возмущение, которое необ-

ходимо, чтобы механизм проявил такое поведение. Именно сочетание порогового поведения реакции с диффузией порождает распространяющиеся уединенные концентрационные волны. Авторы работы [13] показали, что такие волны, возбуждаемые в системах реакций с диффузией, существуют и движутся намного быстрее, чем это возможно при простых диффузионных процессах, так что они являются высокоэффективными потенциальными носителями информации в форме конечных изменений концентрации на малых расстояниях. Таким образом, в случае “инфекционного” эффекта мы, по-видимому, имеем дело с механизмом бегущей волны, причем оценки работы [12] указывают на то, что такой механизм передачи “химических” сообщений эффективен на расстоянии порядка сантиметров за время порядка минут, в то время как чисто диффузионный процесс на аналогичное действие потребовал бы времени порядка многих часов или даже дней.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ И ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

При одновременном воздействии механической и радиационной нагрузок условия возникновения и характер развития тепловых неоднородностей (структур) в неподвижной металлической среде с коэффициентом теплопроводности и объемными источниками тепла, зависящими степенным образом от температуры, естественным образом могут быть получены в рамках замкнутой теории локализации для сред с произвольными нелинейностями или, иначе говоря, с помощью теории так называемых режимов с обострением в нелинейных средах, развиваемой научной школой Курдюмова [2].

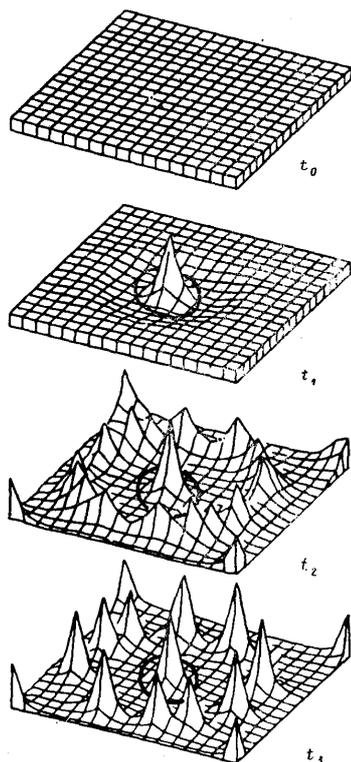


Рис. 2. Результаты исследований модели (3). Концентрация активатора, как функция двух про-

странственных координат для различных моментов времени $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ [9,11]

В материаловедении одна из причин появления тепловых, а значит, “дефектных” структур может быть обусловлена тем, что объемный температурный источник, нелинейным образом зависящий от температуры, порождается именно самой средой в силу указанного выше взаимосопряженного (т.е. обусловленного совместным действием механической “квазистатической” нагрузки и радиации) механизма роста тепловой энергии [5], что несомненно делает его подобным автокаталитическому источнику.

Суть другого примера интересна тем, что степенной рост температуры наблюдается в известном явлении сверхглубокого проникновения частиц в металлические преграды, обнаруженном при ударно-волновой обработке и введении легирующих добавок в объем материала вследствие энергии взрыва [14]. Причем здесь он обеспечивается, по-видимому, локальным инициированием волновых самораспространяющихся режимов горения, протекающих без участия кислорода (рис.3,г). Другими словами, автокаталитический характер роста температуры индуцируется так называемым самораспространяющимся высокотемпературным синтезом [15], в котором в качестве горючего выступают металлы, например, Ti, Zr, Hf, Ta, Nb, Cr, Mo, W, Al, Mg, Co, Cu и др., в качестве окислителя – неметаллы (B, C, Si и др.). Характерной особенностью является то, что в ходе процесса практически отсутствует газовыделение и образуются полностью конденсированные продукты, при этом в конденсированной фазе может развиваться очень высокая температура (до 4000 К). Возможность такого безгазового горения обусловлена большим тепловыделением при химическом взаимодействии и термической стабильностью продуктов – тугоплавких соединений типа боридов, карбидов, силицидов, нитридов и др.

Примеры экспериментального наблюдения самораспространяющегося высокотемпературного синтеза в виде волн гетерогенного горения представлены на рис.3,г [16]. Такого рода структуры наблюдались в нержавеющей стали (08X18H10T), подверженной ударно-волновой обработке высокоскоростными ($v \sim 2 \cdot 10^3$ м/с) частицами нитрида кремния с диаметром в диапазоне 40...125 мкм [16].

Таким образом, в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла задача обнаружения нестационарных диссипативных структур и волн концентраций сводится к ставшей уже классической, т.е. к “курдюмовской” [2,17], в которой впервые установлено, что в такой среде может существовать пространственный масштаб (фундаментальная длина), определяющий размер области, где имеется метастабильная локализация тепла, и на асимптотической стадии процесса происходит образование тепловых структур. Ряд особенностей такого поведения нелинейной теплопроводности и тепловых структур теоретически исследовался в [17].

Итак, в [17] рассматривалась одномерная нестационарная задача об иницировании процесса горения возмущением температуры, внесенным в конечный участок длины Δr_0 первоначально холодной среды. При этом исследование проводилось при помощи анализа автомодельных и аналитических решений, а также при помощи прямого численного решения соответствующих уравнений в частных производных.

Приведем некоторые детали этой работы, необходимые для иллюстрации нашей постановки задачи. В общем случае рассматривается задача Коши в области $-\infty < r < \infty$ для уравнения с источниками (задача о горении [2,17])

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k T^c \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q T^\beta, \quad t \geq t_0, \quad T(t_0, r) = T_0(r), \quad (5)$$

где $k > 0, q > 0, \sigma > 0, \beta > 0$.

Это уравнение имеет автомодельное решение

$$\xi = -irq^{-m} t^{-m} k^{-1/2} = -ir(qt)^{-m} (kt)^{-1/2},$$

$$T(h, t) = (-qt)^n \cdot f(\xi), \quad i^2 = -1, \quad (6)$$

где $n=(1+\beta)-1, m_1 = n\sigma/2, m = m_1 + 1/2$, а $f(\xi)$ – решение уравнения

$$-nf + m\xi f' = (f^\sigma f')' + f^\beta, \quad f' \equiv df/d\xi. \quad (7)$$

Выражение (6) дает решение задачи Коши при $t_0 \leq t < \infty$ и при специальном задании

$$T_0(r) = (-q \cdot t_0)^n \cdot f(\xi_0)$$

стремится к нулю и поэтому (6) можно трактовать как решение сформулированной выше задачи с бесконечно малыми начальными данными при $t \rightarrow -\infty$. Это позволяет искать решение, отличное от нуля в конечной (или бесконечной) области $-\xi_\phi \leq \xi \leq \xi_\phi$ и удовлетворяющее условиям холодного фона (в данном случае металлической преграды) $f=0, f\sigma \cdot f' = 0$ при $\xi = \pm \xi_\phi$, а также условию симметрии $f' |_{\xi=0} = 0$.

Тогда из вида автомодельного решения видно, что возможны три различных режима горения (см. рис.3) :

- HS-режим (при $1 < \beta < \sigma + 1$), когда полуширина области горения Δr^* возрастает с ростом t (при $t \rightarrow -0$);
- S-режим (при $\beta = \sigma + 1$), когда Δr^* неизменно во времени;
- LS-режим (при $\beta > \sigma + 1$), когда полуширина области горения Δr^* сокращается.

На рис.3 приведены профили температуры $T(r)$ для различных моментов времени в случае S-, HS- и LS-режимов [17]. Для S-режима они получены (см. рис.3,а) численным решением задачи (5) при $k_0=1, q_0 = 1, \sigma=2$. Для S-режима ($\beta=3$) и HS-режима ($\beta=5/3$) решения выходят на автомодельное в соответствии с (6) (см. рис. 3, в). Аналогичные расчеты для LS-режима при $\beta > \sigma + 1$ (см. рис. 3,б) показали, что

в случае конечных начальных возмущений выхода нет, однако профиль $T(t, r)$ внутри области горения близок к автомодельному решению и сильно искажается на границе области.

В случае S-режима существует аналитическое решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $f\sigma \cdot f' = 0$ при $f = 0$:

$$T(r, t) = (\bar{q}_0 (t_f - f))^{-1/\sigma} (\sin^2 \alpha (c_1 - r))^{1/\sigma}, \quad (8)$$

где c_1 – произвольная постоянная, $\bar{q}_0 = q_0 \sigma (\sigma + 2) / (\sigma + 1)$, $\alpha = [\sigma 2 q_0 / 4 k_0 (\sigma + 1)]^{1/2}$.

Решение (9) является периодической функцией r с периодом

$$L_T = \pi / \alpha = 2\pi [(\sigma + 1) k_0 / \sigma^2 q_0]^{1/2}. \quad (9)$$

Эта величина в [17] названа фундаментальной длиной (ф.д.). Из (8) видно, что в точках $r_k = c_1 + kL_T, k = \pm 1, 2, \dots$, потоки равны нулю. Имеется самоподдерживающаяся в течение конечного времени, зависящего от начального возмущения, тепловая изоляция соседних слоев (r_{k-1}, r_k) и (r_k, r_{k+1}) длины L_T .

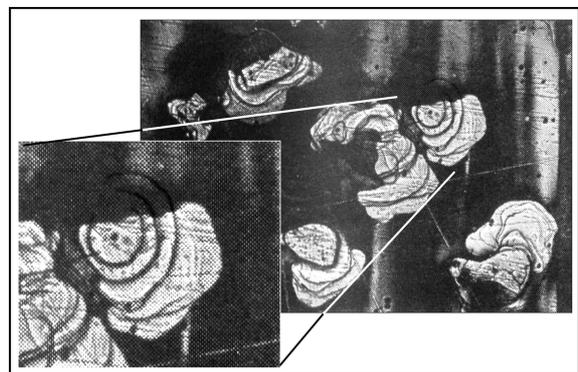
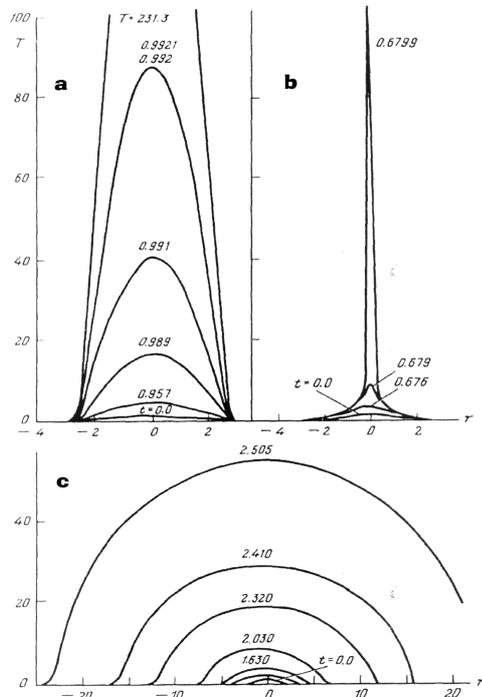


Рис. 3. Профили температуры T для различных моментов времени (числа у кривых) в случае S-ре-

жима (а), HS-режима (b), LS-режима (с) и тепловая диффузионная HS-структура, образованная в нержавеющей стали (08X18H10T), подверженной ударно-волновой обработке высокоскоростными частицами нитрида кремния (d)

В случае $\sigma = \beta - 1$ независимо от условий $\Delta r_0 < L_T$ или $\Delta r_0 > L_T$ решение уравнений (5) асимптотически выходит на один период решения (8), иными словами, горение происходит на ф.д. в окрестности (имеющей диаметр L_T) точки с максимальной температурой T_0 (r). При специальном выборе начальных данных можно получить одновременное горение нескольких структур (8), каждая из которых имеет длину L_T .

Как указано в [17], учет ряда физических факторов, например, выгорания среды, изменения закона скорости горения с ростом температуры и др., приводит к переходу и LS- и S-режимов в HS-режимы при конечных температурах, сопровождающиеся уменьшением времени локализации тепла. Именно такого рода тепловые диффузионные структуры, характерные для HS-режима, по-видимому, наблюдались в нержавеющей стали (08X18H10T), подверженной ударно-волновой обработке высокоскоростными ($v \sim 2 \cdot 10^3$ м/с) частицами нитрида кремния с диаметром в диапазоне 40...125 мкм (см. рис.3,г).

И, наконец, следует отметить, что при $\beta \leq 1$ горение осуществляется всегда в HS-режиме, а также привести одно очень важное замечание: в сжимаемой движущейся среде аналогом фундаментальной длины является фундаментальная масса [18].

ЛИТЕРАТУРА

1.В.И.Арнольд. Теория катастроф // *Синергетика и психология. Тексты.* М.: МГСУ «Союз», 1997, с.230-252.

2. *Режимы с обострением. Эволюция идеи: законы коэволюции сложных структур.* М.: «Наука», 1998, 255с.

3.И.Пригожин. *Время, структура и флуктуации* // *УФН.* 1980, т.131, с.185.

4.Дж.Николис *Динамика иерархических систем.* М.: «Мир», 1989, 486 с.

5.И.Пригожин, Дж.Николис. Сложное и перенос знаний. // *Синергетика и психология. Тексты.* - М.: МГСУ, «Союз», 1997, с.65-93.

6.А.М.Turing. The chemical basis of morfogenesis // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* 1952, Ser. B, v.237, p.37-72.

7.Ю.Н.Белинцев // *УФН.* 1983, т.141, №1, с.55-101.

8.В.А.Васильев, Ю.М.Романовский, В.Г.Яхно // *УФН.* 1979, т.128, с.625-666.

9.А.Gierer, Н.Meinhardt. *Lectures on Mathematics in the Life Sciences.* 1974, v.7, p.163-189.

10.Г.Хакен. *Синергетика.* М.: «Мир», 1980, 404с.

11.Н.Meinhardt. *The algorithmic beauty of sea shells.* Springer. 1998, 236 p.

12.Дж.Марри. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии.* М.: «Мир», 1983, 354 с.

13.N.F.Britton, J.B.Murray // *J. Theor. Biol.* 1979, v.77, p.317-332.

14.С.М.Ушеренко. *Сверхглубокое проникновение частиц в преграды и создание композиционных материалов.* Минск, 1998, 208 с.

15.А.Г.Мержанов, Э.Н.Руманов // *УФН.* 1987, т.151, с.553.

16.S.M.Usherenko et al. // *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 1994, v.37, N15, p.2367-2375.

17.А.А.Самарский, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов // *ДАН СССР.* 1976, т.227, №2, с.345-351.

18.Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов // *ДАН СССР.* 1974, т.216, №6, с.1254 .