УДК 621.039:548.3

АТЕРМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ РАДИАЦИОННОГО РОСТА

Л.В.Танатаров, А.С.Абызов
ННЦ ХФТИ, г.Харьков 61108, Украина

Під атермічним радіаційним ростом (РР) розуміють зміну форми зразка без видимої зміни його питомого обсягу при таких низьких температурах, коли звичайна термічна дифузія не працює. Каскадний механізм атермічного РР уперше запропонований Баклі та Летертом, однак відповідний математичний підхід не був розроблений. У даній праці враховується „багатофазність” області впливу, тобто кратність ступеня її перекриття з ОВ інших дислокацій. Виявляється, що імовірність фази, що відповідає *k*-кратному перекриттю, підкоряється закону Пуассона. Формулюється повна система кінетичних рівнянь, початкова та гранична умови, що описують еволюцію функції розподілу дислокаційних петель по розмірах. Отримано вираз для величини деформації РР і її швидкості. У визначених випадках отримані точні аналітичні рішення для функції розподілу дислокаційних петель по розмірах і швидкості РР.

Под атермическим радиационным ростом (РР) понимают изменение формы образца без видимого изменения его удельного объема при таких низких температурах, когда обычная термическая диффузия не работает. Каскадный механизм атермического РР впервые предложен Бакли и Летертом, однако соответствующий математический подход разработан не был. В данной работе учитывается «многофазность» области влияния, то есть кратность степени ее перекрытия с ОВ других дислокаций. Оказывается, что вероятность фазы, соответствующей *k*-кратному перекрытию, подчиняется закону Пуассона. Формулируется полная система кинетических уравнений, начальное и граничные условия, которые описывают эволюцию функции распределения дислокационных петель по размерам. Получены выражения для величины деформации РР и ее скорости. В определенных случаях получены точные аналитические решения для функции распределения дислокационных петель по размерам и скорости РР.

The term athermic radiation growth (RG) covers the change in the shape of a sample without visible change of its specific volume at temperatures so low that ordinary thermal diffusion doesn’t take place. The cascade mechanism of athermic RG was first introduced by Buckly and Letert, but the corresponding mathematical approach was not developed. In the present paper the “multiphase” influence sphere is taken into account, i.e. the multiplicity of its overlapping with the influence sphere of other dislocations. It turns out, that the phase probability corresponding to the *k*-times overlapping obeys the Poisson law. The complete system of kinetics equations is formulated, as well as initial and boundary conditions that describe the evolution of the function of dislocation loops distribution by sizes. The equations for RG deformation and its speed are obtained. In certain cases the exact analytical solutions are obtained for the distribution function of sizes and RG speed of dislocation loops.

ВВЕДЕНИЕ

Под радиационным ростом понимают изменение линейных размеров и формы деталей активной зоны реактора без видимого изменения их удельного объема. Этому явлению посвящено большое количество работ, что связано с практической важностью понимания его физической природы, поскольку радиационный рост (в дальнейшем РР) меняет геометрию ответственных деталей активной зоны реактора. Отрицательные последствия его с течением времени были нейтрализованы посредством конструктивных мер, устранявших такие нежелательные явления, как прогиб и соприкосновение ТВЭЛов и тому подобные. По мере решения практических проблем, связанных с отрицательными последствиями РР, интерес к физической стороне этого явления постепенно ослабевал, и сейчас публикации на эту тему появляются значительно реже, чем 30…40 лет назад.

Физическая сущность РР заключается в том, что облучение переносит атомы из кристаллических плоскостей одной ориентации в плоскости другой.. Вопрос в том, каким образом это осуществляется. Большинство теорий сходится на том, что механизмом этого переноса является анизотропия обычной термической диффузии, обусловленная низкой симметрией кристаллической решетки таких металлов, как уран, цирконий. Казалось бы, что с понижением температуры эффект должен ослабевать. Однако интенсивный РР наблюдался и при температурах порядка $4^{o}K$ [1], при которой ни о какой диффузии, обусловленной температурой, речь идти не может. Следовательно, в этих условиях работает какой-либо атермический механизм роста. Наиболее ранние попытки объяснения низкотемпературного РР были предприняты в работе Конобеевского с сотрудниками [2], затем в работах Бакли [3] и Летертра [4]. Конобеевский объясняет РР в уране накоплением точечных дефектов (ТД) в различно ориентированных атомных плоскостях. Не останавливаясь на описании предлагаемого им механизма, отметим только, что он неминуемо приводит к зависимости деформации РР от интенсивности производства ТД облучением, что не отмечается экспериментально вплоть до температур порядка $200^{o}C$.

Бакли [3] и несколько позже Летертр [4] предложили «каскадный» механизм зарождения и роста дислокационных петель межузельного и вакансионного типов, приводящий к атермическому РР. Существо этого механизма в следующем. Вследствие анизотропии решетки потоки образующихся в каскаде соударений междо-узельных атомов и ва-

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2003. №6.
Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (82), с.34-41.

кансий разделяются: междо-узельные атомы в результате краудионных соударений выносятся на периферию каскадной области, где и оседают, образуя междоузельный кластер. Вакансии же скапливаются в центральной зоне каскадной области, образуя вакансионный кластер (обедненная зона). Скопление междоузельных атомов приводит к появлению напряжений сжатия, способствующих образованию в обедненной зоне плоских скоплений вакансий, являющихся зародышами вакансионных дислокационных петель. В области междоузельного кластера эти же напряжения заставляют МА собираться в междоузельные дислокационные петли, причем, плоскости междоузельных петель перпендикулярны плоскостям вакансионных. Дальнейшая эволюция этих петель такова: междоузельная петля увеличивает свой размер, если следующий каскад накрывает ее ядро своим междоузельным кластером, и уменьшает, если ядро накрывает вакансионный кластер каскада. Наоборот, вакансионная петля увеличивается, поглощая вакансионный кластер каскада, и уменьшается при поглощении кластера междоузельного. При этом считается, что все $\Re$ ТД., содержащиеся в кластере какого-либо сорта, переходят в дислокационную петлю. Таким образом, предполагается, что дислокационные петли обоих сортов изменяют свои размеры скачками, увеличивая или уменьшая свою площадь на величину $a^2\Re$, где a — атомный размер.

В работах [3] и [4] дано качественное описание модели, не подкрепленное формально математическим обоснованием. Ему посвящена работа [5]. В ней сформулирована система кинетических уравнений для функций распределения петель обоеего сорта по размерам, соответствующие граничные и начальные условия, обеспечивающие единственность решения, записаны выражения для вероятностей перехода петли в процессе изменения ее размеров. Система уравнений решалась численно, были получены графики для деформации РР и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Настоящая работа является естественным продолжением работы [5], но предпочтение отдается формально математической стороне проблемы. Она не претендует на то, чтобы ее результаты полностью совпадали с результатами эксперимента хотя бы потому, что ее целью является оценка вклада одного механизма в явление, определяемое многими механизмами.

1. АТЕРМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ РАДИАЦИОННОГО РОСТА УРАНА. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕТЕЛЬ ПО РАЗМЕРАМ

Пусть $F_\alpha(N,t)$ — функция распределения петель сорта α по размерам, роль которых играет число N, либо «лишних» атомов, составляющих диск внедренной атомной плоскости, либо диск из вакансий, представляющий собой кусок выброшенной плоскости. Введем вероятности $W_\alpha(N|N')$ перехода петли сорта α $(\alpha = i,v)$ из состояния с N точечными дефектами сорта α в состояние с N' такими же дефектами. Считаем накрытие ядра дислокационной петли кластером каскада достаточно редким событием для того, чтобы не учитывать одновременного накрытия несколькими каскадами. Поэтому только $W_\alpha(N|N-\Re)$ и $W_\alpha(N|N+\Re)$ считаем отличными от нуля. В этих предположениях можем записать кинетические уравнения для функций распределения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\alpha(N,t)}{\partial t} &= W_\alpha(N-\Re|N)F_\alpha(N-\Re,t) + \\ &+ W_\beta(N+\Re|N)F_\alpha(N+\Re,t) - \\ &- \left[W_\alpha(N|N+\Re) + W_\beta(N|N-\Re)\right]F_\alpha(N,t).\end{aligned} \tag{1}$$

Так как петли могут изменять свои размеры путем потери или приобретения $\Re$ точечных дефектов, N кратно $\Re$. Вероятность зарождения петли в единицу времени (скорость зарождения), очевидно, задается выражением

$$J_\alpha(t) = W_\alpha(0|\Re)F_\alpha(0,t). \tag{2}$$

Соотношение (2), очевидно, является граничным условием для системы (1). Начальное условие:

$$F_\alpha(N,0) = 0.$$

Поскольку уравнения (1) разностные второго порядка по N, необходимо задать еще второе граничное условие. Если рассматривается бесконечный кристалл, то естественным условием является:

$$F_\alpha(\infty,t) = 0.$$

Если кристалл конечен, то существует $N = N_m$, где N_m соответствует петле, «проросшей» через весь кристалл, которая по сути уже является либо лишней плоскостью, либо отсутствием плоскости (если петля вакансионная). При этом необходимо потребовать, чтобы

$$F_\alpha(N_m,t) = 0,$$

ибо петля, достигшая максимального размера, изменить его уже не может, так как попросту исчезает.

Скорость радиационного роста в этом случае равна числу петель, достигающих в своем росте предельного размера $N_m^{(\alpha)}$:

$$aW_\alpha\left(N_m^{(\alpha)} - \Re\,\middle|\,N_m^{\alpha}\right)F_\alpha\left(N_m^{\alpha} - \Re,t\right)$$

и увеличению площади всех меньших петель в единицу времени, деленному на поперечное сечение образца в данном направлении, умноженному на постоянную решетки a, то есть

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} &= a\sum_{N=\Re}^{N_m^{(\alpha)}}\frac{R_\alpha^2}{L^2}\frac{\partial F_\alpha(N,t)}{\partial t} + \\ &+ aW_\alpha\left(N_m^{(\alpha)} - \Re\,\middle|\,N_m^{(\alpha)}\right)F_\alpha\left(N_m^{(\alpha)} - \Re,t\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь L — линейный размер кристалла в направлении роста, R_α — радиус петли сорта α. В стационарном случае в скобках остается только второе слагаемое. Стационарное состояние, безусловно, существует, так как в этом случае есть источник и сток для распределения петель.

Если рассматривается бесконечный кристалл, то стационарного состояния нет, так как есть только источник (зарождение), сток отсутствует, так как петли из кристалла не убираются. В этом случае в выражении (3) для скорости роста остается только слагаемое, содержащее производную по времени.

Займемся теперь выяснением вида выражений для вероятностей $W_\alpha(N|N')$. Очевидно, что кластер сорта α может вызвать изменение размера петли в том случае, если он попадет в так называемую область влияния ее, представляющую собой тор объема $2\pi R(N)\pi r_\alpha^2$, больший радиус которого равен радиусу $R(N)$ петли, а меньший — радиусу части каскада, обогащенной ТД сорта α. Пусть n_c — число каскадов, возникающих в единице объема за единицу времени. Каждый каскад может породить по одной петле каждого сорта, если он не попадет в ОВ какой либо уже существующей петли. При этом, вероятность рождения петли была бы равна n_c, но петля родиться не может, если каскад попал в ОВ какой либо из существующих петель, и вероятность рождения J_α оказывается меньше n_c: $J_\alpha = n_c\hat{F}(0)$, где $\hat{F}_\alpha$ — вероятность того, что кластер сорта α не попал ни в одну из ОВ уже существующих петель. Эта величина будет определена далее. Вероятность попадания кластера сорта α в область влияния (ОВ) данной петли равна $2\pi R(N)\pi r_\alpha^2/L^3$. В единицу времени в этом объеме возникает n_cL^3 каскадов, следовательно, вероятность попадания хотя бы одного кластера сорта α в ОВ петли равна

$$n_cL^3\cdot 2\pi R(N)\pi r_\alpha^2/L^3 = 2\pi R(N)\pi r_\alpha^2 n_c .$$

Поскольку $\pi R^2(N) = a^2N$, $R = a\left(\sqrt{N/\pi}\right)$, и для вероятности получаем

$$W_\alpha^0(N) = 2a\pi^{3/2}n_c\sqrt{N}r_\alpha^2 . \tag{4}$$

Если перекрытие нескольких ОВ отсутствует, то $W_\alpha^0(N)$ и есть вероятность изменения числа ТД в плоском кластере (диске, ограниченном петлей) на $\Re$ единиц. Если перекрытие ОВ есть, то такая вероятность меньше той, что следует из формулы (4). Действительно, в этом случае на получение $\Re$ ТД могут «претендовать» и другие петли, чьи ОВ перекрываются с ОВ данной. В работе [5] для того, чтобы преодолеть трудность, состоящую в необходимости учитывать разделение всех ТД кластера по дислокационным петлям, чьи ОВ перекрываются, использовалось предположение, что в данном случае малый радиус ОВ уменьшается так, чтобы ОВ всех петель плотно заполняли пространство, не перекрываясь. В настоящей работе считается, что этот радиус остается неизменным. Обозначим через $\hat{F}_\alpha$ условную вероятность того, что, попав в ОВ данной петли, кластер каскада сорта α отдаст ей все свои ТД, то есть в этом случае петля получит $\Re\hat{F}_\alpha$ ТД. Разобьем ОВ петли на «фазы», соответствующие различным степеням перекрытия с другими ОВ. Пусть $\mathrm{E}(n)$ — объемная доля (или вероятность) «фазы» n — кратного перекрытия. Тогда среднее число ТД данного сорта α, попадающее в исходную петлю, равно математическому ожиданию:

$$\Re\left[1-\sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{E}_\alpha(k)\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{E}_\alpha(k)}{k}\Re .$$

Множитель $1/k$ введен по той причине, что при попадании кластера в область k — кратного перекрытия все $\Re$ ТД могут перейти только в одну петлю, а так как их k, то вероятность попасть в одну из них равна $1/k$. Приравнивая оба выражения для среднего числа ТД, попадающих в данную петлю, получаем выражение для условной вероятности

$$\hat{F}_\alpha = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{E}_\alpha(k)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{E}_\alpha(k)}{k} .$$

Таким образом, вероятность получения данной петлей всех $\Re$ ТД равна $W_\alpha = W_\alpha^0\hat{F}_\alpha$. Теперь уже можно записать выражения для вероятностей $W_\alpha(N|N')$, фигурирующих в кинетических уравнениях для функций распределения:

$$W_\alpha(N-\Re|N) = 2\pi^{3/2}ar_\alpha^2n_c\sqrt{N-\Re}\hat{F}_\alpha$$

$$W_\beta(N+\Re|N) = 2\pi^{3/2}ar_\beta^2n_c\sqrt{N+\Re}\hat{F}_\beta .$$

Индекс α относится к кластеру однотипному с дислокационной петлей, индекс β означает кластер типа противоположного типу петли. Так в уравнении роста междоузельной петли $\alpha = i, \beta = v$ и наоборот, в уравнении роста вакансионной петли $\alpha = v, \beta = i$. Удобно ввести вместо N переменную $y = N/\Re$, и положить:

$$\frac{1}{2}\left(r_i^2+r_v^2\right) = r^2, \frac{1}{2}\left(r_i^2-r_v^2\right) = \delta r^2 .$$

Тогда $r_i^2 = r^2(1+\delta), r_v^2 = r^2(1-\delta)$. Обозначив $\delta_i \equiv \delta$, $\delta_v \equiv -\delta$, можем записать $r_\alpha^2 = r^2(1+\delta_\alpha)$. Теперь выражения для вероятностей запишутся в виде:

$$W_\alpha(N-\Re|N) = \hat{F}_\alpha(1+\delta_\alpha)n_c\cdot 2\pi^{3/2}r^2a\sqrt{\Re}\cdot\sqrt{y-1}$$

$$W_\beta(N+\Re|N) = \hat{F}_\beta(1+\delta_\beta)n_c\cdot 2\pi^{3/2}r^2a\sqrt{\Re}\sqrt{y+1} .$$

Кинетические уравнения в этих обозначениях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 2\pi^{3/2}ar^2n_c\sqrt{\Re}\{&\hat{F}_\alpha(1+\delta_\alpha)\sqrt{y-1}F_\alpha(y-1,t)+\\ &+\hat{F}_\beta(1+\delta_\beta)\sqrt{y+1}F_\alpha(y+1,t)-\\ &-\left[\hat{F}_\alpha(1+\delta_\alpha)+\hat{F}_\beta(1+\delta_\beta)\right]\sqrt{y}F_\alpha(y,t).\end{aligned} \tag{5}$$

Осталось теперь определить выражения для вероятностей $\mathrm{E}(k)$. Введем случайную величину $\tilde{T}_\alpha$, равную числу ОВ по отношению к кластеру сорта α, накрывающих точку наблюдения (ТН). Очевидно, что

$$\tilde{T}_\alpha = \sum_i g_i ,$$

где $g_i^{(\alpha)}$ — случайная величина, соответствующая i-й дислокационной петле. Она равна единице, если ТН попадает в ОВ α -го сорта i -й дислокационной петли и нулю в противном случае. Ее среднее значение $\bar{g}_i^\alpha = \omega_i^\alpha$, где ω_i^α — соответствующая вероятность, равная отношению объема OB_i^α к объему всего кристалла (зерна) L^3:

$$\omega^{(\alpha)} = 2\pi^{3/2} a r^2 (1+\delta_\alpha)\sqrt{\Re y}/L^3, \ (\alpha = i, v).$$

Введем характеристическую функцию величины $\widetilde{T}_\alpha$:

$$\overline{e^{-z\widetilde{T}_\alpha}} = \prod_y \overline{\left(e^{-zg(y)}\right)^{N_y}}.$$

Здесь N_y — число петель в зерне с заданным y (учитываются петли обоих сортов). Величина N_y распределена по закону Пуассона около своего среднего значения $\overline{N_y} = L^3 F(y,t)$. Усреднение производится по распределению Пуассона:

$$\overline{e^{-z\widetilde{T}_\alpha}} = \prod_{y=1}^{y_m} \sum_{N_y=0}^{\infty} \left[\frac{1}{N!}\right] e^{-\overline{N_y}} \cdot \overline{N_y}^{N_y} \left(\overline{e^{-zg^{(\alpha)}(y)}}\right)^{N_y} =$$

$$= \prod_{y-1}^{y_m} \exp\left[\overline{N}\left(\overline{e^{-zg^{\alpha}}} - 1\right)\right] =$$

$$= \exp(-\Psi_\alpha(z)) = \Psi_\alpha(z) \equiv \left(1 - e^{-z}\right) B_\alpha$$

$$B_\alpha \equiv \sum_{y=1}^{y_m} \overline{N}_y w^{(\alpha)}(y) \quad . \tag{6}$$

Введем обозначения: $\widetilde{\varphi}_\alpha(y,\tau) \equiv 2\pi^{3/2} a r^2 \sqrt{\Re y} F_\alpha(y,t)$, $t = t_0\tau$, $t_0^{-1} \equiv 2\pi^{3/2} a r^2 n_c \sqrt{\Re}$, тогда $B_\alpha = (1+\delta_\alpha)B$,

$$B = \sum_{y=1}^{y_m} [\widetilde{\varphi}_i(y,\tau) + \widetilde{\varphi}_v(y,\tau)]. \tag{7}$$

По определению среднего

$$\overline{\exp\left(-z\widetilde{T}_\alpha\right)} = \int_0^\infty d\widetilde{T}_\alpha \exp\left(-z\widetilde{T}_\alpha\right) \cdot P_\alpha\left(\widetilde{T}_\alpha\right), \tag{8}$$

где $P_\alpha\left(\widetilde{T}_\alpha\right)$ — плотность вероятности величины $\widetilde{T}_\alpha$. Обращая это соотношение, находим:

$$P_\alpha\left(\widetilde{T}_\alpha\right) = \exp(-B_\alpha) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \cdot \exp\left[z\widetilde{T}_\alpha + B_\alpha \cdot e^{-z}\right].$$

Раскладывая в ряд $\exp(B_\alpha \cdot e^{-z})$, получаем:

$$P_\alpha\left(\widetilde{T}_\alpha\right) = \exp(-B_\alpha) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_\alpha^n \delta\left(\widetilde{T}_\alpha - n\right).$$

Для вероятности $\mathrm{E}_\alpha(n)$ получаем закон Пуассона:

$$\mathrm{E}_\alpha(n) = e^{-B_\alpha} \frac{1}{n!} B_\alpha^n, \ n = 0,1,2...$$

Вероятность не попасть ни в одну из областей влияния соответствует n=0:

$$\mathrm{E}_\alpha(0) = \exp[-(1+\delta_\alpha)B].$$

Дифференцируя (8) по z и полагая z=0, получаем, пользуясь (6):

$$T_\alpha \equiv \overline{\widetilde{T}_\alpha} = B_\alpha = (1+\delta_\alpha)B.$$

Теперь, после того, как известно выражение для $\mathrm{E}_\alpha(n)$, можно записать $F_\alpha(T_\alpha)$:

$$\hat{F}(T_\alpha) = e^{-T_\alpha}\left[1 + \int_0^{T_\alpha} \frac{d\eta}{\eta}\left(e^{\eta} - 1\right)\right]. \tag{9}$$

Для того, чтобы найти T, необходимо решить кинетические уравнения для функций распределения $\widetilde{\varphi}_\alpha(y,\tau)$, считая $T(\tau)$ известной функцией. Но эта функция — линейный функционал $\widetilde{\varphi}_\alpha$, как это следует из (7), поэтому для T получается функциональное уравнение $T = \Phi(T)$. Вид функционала Φ получим, решая кинетические уравнения для функций распределения $\widetilde{\varphi}_\alpha$ и подставляя решения в (7). Кинетические уравнения для $\widetilde{\varphi}_\alpha$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}_\alpha}{\partial\tau} = \widetilde{W}_\alpha \widetilde{\varphi}_\alpha(y-1,\tau) + \widetilde{W}_\beta \widetilde{\varphi}_\alpha(y+1,\tau) - \left(\widetilde{W}_\alpha + \widetilde{W}_\beta\right)\widetilde{\varphi}_\alpha(y,\tau) \tag{10}$$

$$\widetilde{j}_\alpha = e^{-T_\alpha}, \ \widetilde{W}_\alpha = (1+\delta_\alpha)\hat{F}(T_\alpha) \tag{11}$$

Граничные условия:

$$\widetilde{W}_\alpha \cdot \widetilde{\varphi}_\alpha(0,\tau) = \widetilde{j}_\alpha, \ \widetilde{\varphi}_\alpha(y_m,\tau) = 0. \tag{12}$$

Вводя обозначение $\widetilde{\varphi}_\alpha(0,\tau) \equiv \varsigma_\alpha(\tau)$, воспользовавшись (11), первое из условий (12) перепишем:

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(0,\tau) = \zeta_\alpha(\tau) = (1+\delta_\alpha)^{-1}\left[1 + \int_0^{T_\alpha} \frac{d\eta}{\eta}\left(e^{\eta} - 1\right)\right]^{-1}. \tag{13}$$

В случае бесконечного кристалла второе граничное условие (12) нужно заменить таким: $\widetilde{\varphi}_\alpha(\infty,\tau) = 0$.

Аналитически уравнения (10) можно решить только при $\delta = 0$. В этом случае можно ввести новую переменную по формуле $d\xi = \widetilde{W}(T)d\tau = \hat{F}(T)d\tau$. Уравнение (10) приобретает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}_\alpha}{\partial\xi} = \Delta^{(2)}\widetilde{\varphi}_\alpha.$$

Здесь $\Delta^{(2)}$ — вторая разность по переменной y. Далее можно совершить преобразование Лапласа по ξ и свести уравнение к обыкновенному разностному второго порядка по y, определить $\widetilde{\varphi}_\alpha(\xi)$, построить функцию $\Phi(\xi) = B$. Но $B = T(\xi)$, таким образом, $T = \Phi(\xi)$. Связь между τ и z находится из уравнения $d\xi = \Phi(\xi)d\tau$. В действительности δ всегда положительно, поэтому в общем случае указанный прием неприменим. Несмотря на это, в качестве иллюстрации метода, изложенного в разделе первом, все же рассмотрим случай $\delta = 0$ и получим решение $T(\xi)$ для бесконечного кристалла. Перейдем от дискретных значений y к непрерывным. Уравнение для $\widetilde{\varphi}_\alpha$ принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\widetilde{\varphi}_\alpha}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y^2}.$$

Ищем решение, удовлетворяющее граничным условиям (12). Его можно представить в виде интеграла Дюгамеля [7]:

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(y,\xi) = \int_0^{\xi} \varsigma_\alpha(\xi')\frac{\partial G(y,\xi-\xi')}{\partial\xi}d\xi'. \tag{14}$$

Здесь $G(y,\xi)$ — решение дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial G}{\partial\xi} = \sqrt{y}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \ G(y,0) = 0, \ G(\infty,\xi) = 0, \ G(0,\xi) = 1,$$

имеющей автомодельное решение: $G(y,\xi) = \widetilde{G}(\eta)$, $\eta \equiv y^{3/2}\xi^{-1}$, функция $\widetilde{G}(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$\tilde{G}'_{\eta}\cdot(3+4\eta)+9\eta\,\tilde{G}''_{\eta\eta}=0$. Его решением, удовлетворяющим требуемым условиям является:

$$\tilde{G}(\eta)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\Gamma\left(\frac{2}{3};\frac{4}{9}\eta\right).$$

Воспользовавшись им, получаем уравнение для $T(\xi)$:

$$T(\xi)=\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}\int_0^{\xi}\frac{d\xi'}{(\xi-\xi')^{1/3}}\cdot\zeta(\xi') \tag{15}$$

$$\zeta(T)=\left[1+\int_0^T\frac{d\eta}{\eta}\left(e^{\eta}-1\right)\right]^{-1}.$$

С помощью пары формул [6]:

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(x')dx'}{(x-x')^{\alpha}},$$

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{g'(x')dx'}{(x-x')^{1-\alpha}} \tag{16}$$

уравнение (15) может быть приведено к виду:

$$\zeta(T)=(3/2)^{2/3}\frac{1}{\Gamma^2(1/3)}\int_0^{\xi}\frac{T'(\xi')d\xi'}{(\xi-\xi')^{2/3}}.$$

Его решение ищем в виде ряда по степеням $\xi^{2/3}$. Несколько первых членов разложения $\zeta(T)$ по степеням T получим, воспользовавшись представлением функции $1+\int_0^T\frac{d\eta}{\eta}\left(e^{\eta}-1\right)$ в виде ряда: $1+T+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nn!}T^n$, пользуясь которым находим значения производных $\zeta^{(n)}(0)$. В результате получаем:

$$\zeta(T)=1-T+\frac{1}{4}T^2-\frac{2}{9}T^3+\dots$$

Для T находим:

$$T(\xi)=(3/2)^{1/3}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}\xi^{2/3}-(3/2)^{2/3}\Gamma(1/3)\xi^{4/3}+ +\frac{2}{9}\Gamma^3(1/3)\xi^2\left[1+\frac{\Gamma(1/3)}{36\Gamma^2(2/3)}\right]. \tag{17}$$

Возвращаемся теперь к случаю $\delta\neq 0$ и рассмотрим

2. СЛУЧАЙ МАЛЫХ ВРЕМЕН (ДОЗ)

Из (9) и (11) видно, что $W_{\alpha}=W_{\alpha}^0\left(1-T_{\alpha}^2/4\right)$, то есть при малых T, W_{α} можно положить равными W_{α}^0. Коэффициенты при $\tilde{\varphi}_{\alpha}$ в правой части (10) можно считать не зависящими от *T*. Переходим к непрерывным y с интервалом изменения $1\dots y_m$. Уравнения для функций распределения приводятся к виду:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\alpha}}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_{\alpha}}{\partial y^2}-2\delta_{\alpha}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\alpha}}{\partial y}. \tag{18}$$

Одно из граничных условий — (13), второе — $\tilde{\varphi}_{\alpha}(y_m,\tau)=0$.

Совершим преобразование Лапласа по времени над уравнением (18) и граничными условиями, используя начальное: $\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,0)=0$:

$$\frac{s}{\sqrt{y}}\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,s)=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,s)}{\partial y^2}-2\delta_{\alpha}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\alpha}}{\partial y} \tag{19}$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha}(1,s)=\tilde{\zeta}_{\alpha}(s),\quad \tilde{\zeta}_{\alpha}(s)=\int_0^{\infty}e^{-s\tau}\zeta_{\alpha}(\tau)d\tau$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha}(y_m,s)=0.$$

Решение этой дифференциальной задачи: $\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,s)=\tilde{\zeta}_{\alpha}(s)K_{\alpha}(y,s)$, где $K_{\alpha}(y,s)$ удовлетворяет уравнению (19) и граничным условиям: $K_{\alpha}(1,s)=1$, $K_{\alpha}(y_m,s)=0$.

Решение $\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,\tau)$ выражается через $\tilde{\zeta}_{\alpha}$ и $K_{\alpha}(y,s)$:

$$\tilde{\varphi}_{\alpha}(y,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{s\tau}\tilde{\zeta}_{\alpha}(s)\cdot K_{\alpha}(y,s). \tag{20}$$

Подставляя в определение T, получаем для этой функции уравнение:

$$T(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{s\tau}\sum_{\alpha}\tilde{\zeta}_{\alpha}(s)\int_1^{y_m}K_{\alpha}(y,\tau)dy,$$

или

$$T(\tau)=\sum_{\alpha}\tilde{\zeta}_{\alpha}(\tau)*\int_1^{y_m}K_{\alpha}(y,\tau),$$

где

$$K_{\alpha}(y,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{s\tau}K_{\alpha}(y,s)ds.$$

Поскольку $T\to 0$ при $\tau\to 0$, $\zeta_{\alpha}(T)\approx\frac{1}{1+\delta_{\alpha}}-T(\tau)$, и уравнение для Т может быть записано в виде:

$$T(\tau)+2\int_0^{\tau}d\tau' T(\tau')K(\tau-\tau')=f(\tau),$$

где

$$K(\tau)=\int_1^{y_m}dy\sum_{\alpha}K_{\alpha}(y,\tau),$$

$$f(\tau)=\int_0^{\tau}d\tau'\sum_{\alpha}\frac{1}{(1+\delta_{\alpha})}\int_1^{y_m}dyK_{\alpha}(y,\tau).$$

Теперь наша задача — записать выражения для $K(\tau)$ и $f(\tau)$. Прежде всего необходимо найти $K_{\alpha}(y,s)$, решив уравнение (19) совместно с граничными условиями $K_{\alpha}(1,s)=1$ и $K_{\alpha}(y_m,s)=0$. Приведем уравнение (19) для $K_{\alpha}(y,s)$ к виду

$$\left(s/\sqrt{y}+\delta^2\right)\tilde{K}(y,s)=\frac{\partial^2\tilde{K}(y,s)}{\partial y^2}$$

с помощью подстановки $K_{\alpha}(y,s)=e^{\delta_{\alpha}(y-1)}\tilde{K}(y,s)$. Нас интересуют малые времена: $\tau<<1$. Им соответствуют большие s. Поэтому можно решать уравнение для $\tilde{K}$ методом ВКБ:

$$\tilde{K}(y,s)=y^{1/8}sh\left[\frac{4\sqrt{s}}{3}\left(y_m^{3/4}-y^{3/4}\right)\right]\cdot\left\{sh\left[\frac{4\sqrt{s}}{3}\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]\right\}^{-1}.$$

Обратное преобразование для отношения гиперболических синусов приводит к выражению:

$$\frac{2}{3\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[y^{3/4}-1+2n\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{4}{9\tau}\left[y^{3/4}-1+2n\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]^2\right\}$$

Интегрируя по y от 1 до y_m, находим:

$$K(\tau)=\frac{1}{3\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\sum_{\alpha}\int^{y_m}dy\cdot y^{1/8}e^{\delta_\alpha(y-1)}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[y^{3/4}-1+2\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]\exp\left\{-\frac{4}{9\tau}\left[y^{3/4}-1+2n\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]^2\right\}.$$

Из всей суммы оставляем только слагаемое с n=0, так как остальные пропорциональны $\exp\left\{-\frac{4}{9\tau}\left[2n\left(y_m^{3/4}-1\right)\right]^2\right\}$, поэтому

$$K(\tau)\approx\frac{2}{3\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\int_1^{y_m}dy\left(y^{3/4}-1\right)\exp\left\{-\frac{4}{3\tau}\left(y^{3/4}-1\right)^2\right\}.$$

Поскольку $4/3\tau>>1$, получаем $K(\tau)\approx(\pi\tau)^{-1/2}$. Аналогично $f(\tau)=4\sqrt{\tau/\pi}\left(1-\delta^2\right)^{-1}$.

Уравнение для $T(\tau)$ приобретает вид:

$$T(\tau)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{T(\tau')d\tau'}{\sqrt{\tau-\tau'}}=\frac{4\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}\left(1-\delta^2\right)}.$$

Его решение в нулевом приближении:

$$T(\tau)\approx 4\sqrt{\tau/\pi}\left(1-\delta^2\right)^{-1}.$$

Это уравнение легко может быть решено точно преобразованием Лапласа, однако, в этом нет необходимости, поскольку нас интересует случай малых времен.

Найдем зависимость деформации РР от времени при малых временах (дозах). Она определяется площадью петель, плоскости которых перпендикулярны направлению роста:

$$\varepsilon_{gr}^{\alpha}(\tau)\approx\int_1^{y_m}\sqrt{y}\varphi_\alpha(y,\tau)dy.$$

Воспользовавшись формулой (20), запишем:

$$\varepsilon_{gr}^{\alpha}(\tau)\approx\int_1^{y_m}\sqrt{y}dy\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}K_\alpha(y,s)\varsigma_\alpha(s)e^{s\tau}ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds\varsigma_\alpha(s)e^{s\tau}}{sh[\frac{4}{3}\sqrt{s}\left(y_m^{3/4}-1\right)]}\int_1^{y_m}dyy^{5/8}sh[\frac{4}{3}\sqrt{s}\left(y_m^{3/4}-y^{3/4}\right)].$$

Как показано выше, $\varsigma(\tau)\cong\frac{1}{1+\delta_\alpha}$, тогда $\varsigma_\alpha(s)=\frac{1}{1+\delta_\alpha}\cdot\frac{1}{s}$.

Обратное преобоазование Лапласа отношения гиперболических синусов приведено выше. После интегрирования по y с учетом условия $y_m^{3/4}>>9\tau$ и свертки по τ с $\varsigma_\alpha=\frac{1}{1+\delta_\alpha}$, получаем, что $\varepsilon_{gr}^{\alpha}\approx\sqrt{\tau}$.

3. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ВРЕМЕН (БОЛЬШИХ ДОЗ)

Для нахождения асимптотики $\hat{F}_\alpha(T_\alpha)$ при $T_\alpha>>1$, достаточно оценить выражение

$$e^{-T_\alpha}\int_1^{T_\alpha}e^{\eta}d\eta/\eta\approx 1/T_\alpha,$$

тогда кинетические уравнения для $\tilde{\varphi}_\alpha$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\tilde{\varphi}_\alpha}{\partial\xi}=\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_\alpha(y,\xi).\qquad(21)$$

Здесь ξ определяется зависимостью $d\xi=d\tau/T(\xi)$,

$\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_\alpha=\tilde{\varphi}_\alpha(y-1,\xi)+\tilde{\varphi}_\alpha(y+1,\xi)-2\tilde{\varphi}_\alpha(y,\xi)$.

Граничные условия к уравнениям (21):

$$\tilde{\varphi}_\alpha(0,\xi)\equiv\varsigma_\alpha(\xi)=T(\xi)\exp[-(1+\delta_\alpha)T(\xi)]\qquad(22)$$
$$\tilde{\varphi}_\alpha(y_m,\xi)=0.$$

Применим преобразование Лапласа по ξ к уравнению (21) и условиям (22):

$$\frac{s}{\sqrt{y}}\tilde{\varphi}_\alpha(y,s)=\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_\alpha(y,s);\qquad(23)$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha(0,s)=\varsigma_\alpha(s)=\int_0^{\infty}T(\xi)\exp[-s\tau-(1+\delta_\alpha)T(\xi)]d\xi\qquad(24)$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha(y_m,s)=0.$$

Пусть $K(y,s)$ — решение дифференциальной задачи, состоящей из уравнения (23) и граничных условий $K(0,s)=1$, $K(y_m,s)=0$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_\alpha(y,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{s\xi}K(y,s)\varsigma_\alpha(s),\qquad(25)$$

$$T(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{s\xi}K(s)\sum_\alpha\varsigma_\alpha(s),\qquad(26)$$

$$K(s)\equiv\sum_{y=1}^{y_m}K(y,s).$$

В силу (24)

$$T(\xi)=2\int_0^{\xi}T(\xi')e^{-T(\xi)}ch(\delta T(\xi'))K(\xi-\xi')d\xi.\qquad(27)$$

Здесь $K(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{s\xi}K(s)$.

Большим ξ соответствуют малые s, поэтому разложим $K(y,s)$ по степеням s:

$$K(y,s)=k_0(y)+\sum_{m=1}^{\infty}k_m(y)s^m\qquad(28)$$

Подставив его в уравнение (23), записанное для функции $K(y,s)$, ему удовлетворяющей, получим:

$$\Delta^{(2)}k_0(y)=0,\quad\Delta^{(2)}k_m(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}k_{m-1}(y),\ (m\neq 0)$$
$$k_0(0)=1,\qquad k_m(0)=0,$$
$$k_0(y_m)=0,\quad k_m(y_m)=0.$$

Очевидно, что $k_0(y)=1-y/y_m$,

$$K_0=\sum_{y=1}^{y_m}k_0(y)\approx\int_1^{y_m}k_0(y)dy\approx\frac{y_m}{2}.$$

Перейдем к пределу $\xi\to\infty$ в уравнении (26). Это значит, что в разложении (28) мы должны оставить только первое слагаемое, соответствующее $K_0(s)$, получим:

$$T_\infty\equiv T(\xi)|_{\xi\to\infty}=K_0\sum_\alpha\varsigma_\alpha(\xi)|_{\xi\to\infty}=y_mT_\infty e^{-T_\infty}ch(\delta T_\infty).$$

Поскольку $T_\infty>>1$, после сокращения на T_∞:

$$T_\infty = \frac{1}{1-\delta}\ln\frac{y_m}{2}.$$

Полученный результат — следствие существования стационарного решения для функций распределения, которое следует из того, что есть источник и сток для петель.

Найдем теперь асимптотику $T(\xi)$ при больших значениях аргумента. Обозначая $Q(\xi) = 2Te^{-T}ch(\delta T)$, перепишем (27):

$$T(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds e^{s\xi} K(s) Q(s),$$

где $Q(s)$ — образ Лапласа функции $Q(\xi)$. Подставим вместо $K(s)$ его разложение в ряд по s, получим:

$$T(\xi) = \left(K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \frac{d^m}{d\xi^m}\right) Q(\xi).$$

Оставляем в скобках правой части нулевое и первое слагаемые:

$$T(\xi) = \left(K_0 + K_1\frac{d}{d\xi}\right)Q(\xi).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решением которого является

$$\frac{T(\xi)}{T_\infty} = 1 - \exp\left(-\frac{K_0}{|K_1|}\xi\right),\ \frac{K_0}{|K_1|} = \frac{7!!}{2^6 y_m^{3/2}}.$$

Заметим, что зависимость коэффициента при ξ в экспоненте от y_m можно получить, не решая уравнение (21). Действительно, $\tilde{\varphi}_\alpha$ — решение краевой задачи на интервале $(0, y_m)$. Разделим переменные, $\tilde{\varphi}_\alpha = u(\xi)v(y)$, получим: $\frac{\dot{u}(\xi)}{u(\xi)} = \sqrt{y}\frac{v''_{yy}(y)}{v(y)} = -\lambda^2$, где λ — собственное значение. Существует стационарное решение – линейная функция y, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям. Нам необходимо найти наименьшее отличное от нуля значение λ^2, которое и определяет время релаксации. В исходном уравнении для $\tilde{\varphi}_\alpha$ изменим масштаб по переменной y, положив $y = y_m\eta$, тогда уравнение для $v(y)$ примет вид: $v''_{\eta\eta}(\eta)\sqrt{\eta} + \lambda^2 y_m^{3/2} v(\eta) = 0$. Если ввести $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 y_m^{3/2}$, то очевидно, что $\tilde{\lambda}_m^2 \approx 1$, следовательно $\lambda_m^2 \approx \ddot{\lambda}^2 \cdot y_m^{-3/2}$. Из определения ξ следует:

$$\frac{T(\tau)}{T_\infty} = 1 - \exp\left(-\frac{K_0\tau}{|K_1|T_\infty}\right).$$

Время релаксации

$$\tau_{rel} = \frac{2^6}{7!!} y_m^{3/2}\ln(y_m/2)\cdot(1-\delta)^{-1}$$

увеличивается с ростом размера L зерна. При $L = \infty$ стационарного решения нет.

Формула (3) для скорости РР в терминах функций $\ddot{\varphi}_\alpha(y,\xi)$ может быть записана в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{gr} = \frac{\sqrt{a}\Omega\Re}{2\pi^{3/2}r_0^2}\left\{\sum_{y=1}^{y_m^{(i)}}\sqrt{y}\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\varphi}_i(y,\xi) + y_m^{(i)}(1+\delta)\tilde{\varphi}_i\left(y_m^{(i)}-1,\xi\right)\right\}.$$

Но $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\tilde{\varphi}_\alpha}{\partial\tau} = \frac{1}{T}\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_\alpha$ и

$$\dot{\varepsilon}_{gr} \approx \frac{1}{T}\sum_{y=1}^{y_m^{(i)}} y\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_i + y_m^{(i)}(1+\delta)\tilde{\varphi}_i\left(y_m^{(i)}-1,\xi\right).$$

Множитель перед фигурной скобкой не пишем для краткости. Воспользуемся определением второй разности и произведем суммирование:

$$\sum_{y=1}^{y_m^{(i)}} y\Delta^{(2)}\tilde{\varphi}_i = \sum_{y=1}^{y_m^{(i)}} y[\tilde{\varphi}_i(y-1,\xi) + \tilde{\varphi}_i(y+1,\xi) - 2\tilde{\varphi}_i(y,\xi)] = \tilde{\varphi}_i(0,\xi),$$

то есть

$$\dot{\varepsilon}_{gr} \approx \frac{1}{T}\tilde{\varphi}_i(0,\xi) + y_m^{(i)}(1+\delta)\tilde{\varphi}_i\left(y_m^{(i)}-1,\xi\right).$$

Воспользуемся тем, что $\tilde{\varphi}_i(y,\xi) = \varsigma_i(\xi) * K(y,\xi)$, $\tilde{\varphi}_i(0,\xi) = \varsigma_i(\xi)$. При $\xi >> 1$ $K(y,\xi) \approx K_0(y) = 1 - y/y_m^{(i)}$, поэтому $K\left(y_m^{(i)}-1,\xi\right) \cong K_0\left(y_m^{(i)}-1\right) = 1/y_m^{(i)}$. Согласно определению $\varsigma_i(\xi) \cong Te^{-T(1+\delta)}$, и

$$\dot{\varepsilon}_{gr} \approx e^{-(1+\delta)T} + (1+\delta)\varsigma_i(\xi) = e^{-(1+\delta)T}[1 + (1+\delta)T]$$

откуда

$$\dot{\varepsilon}_{gr} \approx e^{-(1+\delta)T_\infty}[1 + (1+\delta)T_\infty] \approx \frac{1+\delta}{1-\delta}\ln\frac{y_m^{(i)}}{2}\cdot\left(\frac{2}{y_m^{(i)}}\right)^{\frac{1+\delta}{1-\delta}}.$$

Таким образом, при $\xi >> 1$

$$\dot{\varepsilon}_{gr} \approx \frac{\sqrt{a}\Omega\Re}{2\pi^{(3/2)}r_0^2}\frac{1+\delta}{1-\delta}\ln\left(\frac{y_m^{(i)}}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{y_m^{(i)}}\right)^{\frac{1+\delta}{1-\delta}}.$$

4. НЕОГРАНИЧЕННЫЙ КРИСТАЛЛ

Решение кинетического уравнения для $\tilde{\varphi}_\alpha$ (10) может быть представлено в виде интеграла Дюгамеля, где

$$G(y,\xi) = \frac{1}{\Gamma(2/3)}\Gamma\left(2/3;\frac{4\eta}{9}\right),\ \eta \equiv \frac{y^{3/2}}{\xi}.$$

Воспользовавшись этим решением, получаем

$$T(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}\int_0^\xi \frac{d\xi'}{(\xi-\xi')^{1/3}} Q(T(\xi')). \qquad (29)$$

Поскольку $T >> 1$, $Q(T) \approx Te^{-T(1-\delta)}$. С помощью пары взаимных формул (16) приводим это уравнение к виду

$$Q(T(\xi)) = \chi\int_0^\xi \frac{T'(\xi')d\xi'}{(\xi-\xi')^{2/3}},\ \chi \equiv 2(3/2)^{2/3}\Gamma^{-2}(1/3).$$

Умножив обе его части на $1-\delta$ и вводя $y(x) \equiv (1-\delta)T(\xi)$, $x = \xi\chi^{-3/2}$, сводим его к виду:

$$ye^{-y} = \int_0^\xi y'(x')(x-x')^{-2/3}dx'.$$

Асимптотика при больших значениях аргумента имеет вид:

$$T(\xi) \approx \frac{2\ln\xi}{3(1-\delta)}.$$

Деформация ε_{gr} радиационного роста пропорциональна $\int_0^\infty dy\cdot\sqrt{y}\tilde{\varphi}_\alpha(y,\xi)$. С помощью формулы (14) можем записать:

$$\varepsilon_{gr} \approx -\frac{1}{\Gamma(2/3)}\int_0^\xi \varsigma_\alpha(\xi')d\xi'\int_1^\infty \frac{y^2 dy}{(\xi-\xi')^2}\left.\frac{d\Gamma\left(\frac{2}{3};\frac{4\eta}{9}\right)}{d\eta}\right|_{\eta=\frac{y^{3/2}}{\xi-\xi'}}. \qquad (30)$$

Воспользовавшись асимптотикой для $T(\xi)$, получаем:

$$\varepsilon_{gr} \approx \frac{1}{(1-\delta)\Gamma(2/3)}\int_0^{\xi} d\xi' \ln\xi' \cdot \xi'^{-\frac{2(1+\delta)}{3(1-\delta)}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{3};\frac{4}{9(\xi-\xi')}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}}.$$

Для скорости РР получаем:

$$\frac{d\varepsilon_{gr}}{d\tau} \approx \xi^{-\frac{2(1+\delta)}{3(1-\delta)}},\ \xi >> 1,\ \xi \approx \frac{\tau}{\ln\tau}.$$

Если $\delta = 0$, то, как мы видели, кинетические уравнения для функций распределения можно решить при всех значениях ξ и получить выражение для T в виде ряда. В этом случае можно исследовать поведение деформации РР не только при больших, но и при малых временах (дозах). При этом $\varsigma(T)$ связано с $T(\xi)$ уравнением (15), а для деформации получаем формулу (29). Производя интегрирование по y, приходим к формуле:

$$\varepsilon_{gr} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7/3}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\int_0^{\xi}\varsigma(\xi')d\xi'\Gamma\left(\frac{5}{3},\frac{4}{9(\xi-\xi')}\right).$$

Поскольку при малых τ T мало, в разложении ς по T оставляем только первое слагаемое, равное единице. После интегрирования получаем:

$$\varepsilon_{gr}^{(0)}(\xi) = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{8/3}\frac{1}{\Gamma(2/3)}\xi^{-2/3}\exp\left(-\frac{4}{9\xi}\right).$$

Видим, что при $\xi \to 0$ ε_{gr}^0 стремится к нулю вместе со всеми производными («спящий» режим РР) РР начинается при $\xi \sim 1$. Асимптотика при больших значениях ξ получается из формулы для ε_{gr} при $\delta \neq 0$, если положить там $\delta = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.Weinberg, J.Durat, R.R.Conte //*Phys. Stat. Sol.,* (a),1970, 1K, p.151.
2. С.Т.Конобеевский, Б.И.Левитский, Л.Д.Пантелеев //*Атомная энергия*,1968, т.24, с.312.
3. S.N.Buckley. *Irradiation growht in Uranium*. Rap. AERE-R 5262, 1966.
4. J.Leteurte. Dislocation and Radiation Damage in Uranium. //"*Raport CEA"* – R –3607,1969.
5. А.И.Жуков, Э.А.Резниченко, Л.В.Танатаров. //*Вопросы атомной науки и техники. Серия: « Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение»*, 2000, №4, с.38–44.
6. Е.Титчмарш. *Введение в теорию интегралов Фурье*. М-Л: ОГИЗ ГИТТЛ, 1949, 479с.
7. А.Н..Тихонов, А.А.Самарский. *Уравнения математической физики.* М.: «Наука», 1972, 735с.