

# ЭВОЛЮЦИЯ ПОТОКА И ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ: ТЕОРИЯ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*М.И. Братченко, С.В. Дюльдя*

*Научно-производственный комплекс*

*“Возобновляемые источники энергии и ресурсосберегающие технологии”  
Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”  
г. Харьков, Украина*

Предложен подход к описанию взаимодействия  $\gamma$ -излучения с гетерогенными объектами, заключающихся в их трактовке как случайных сред с заданными распределениями плотности и элементного состава. На основе библиотеки классов *Geant4* построен “двойной” метод Монте Карло моделирования транспорта излучения в таких средах. Для одномерной геометрии слоистой среды обнаружен эффект увеличения средних потоков и поглощенных доз в случайных средах по сравнению с результатами расчетов в усредненной гомогенной среде. Предложены аналитические вероятностные модели, объясняющие этот эффект.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблемы прохождения  $\gamma$ -излучения через гетерогенные среды важны для многих направлений радиационной и медицинской физики, дозиметрии и физики радиационных технологий. Количественный учет влияния гетерогенности среды применительно к этим проблемам может быть наиболее корректно выполнен путем математического моделирования методом Монте-Карло. Современные пакеты программ статистического моделирования позволяют воспроизводить в математической модели сложные геометрии источников излучения и облучаемых объектов, что обуславливает эффективное применение таких методов к задачам моделирования детекторов в физике высоких энергий [1], планирования распределений поглощенных доз в радиотерапии [2, 3], расчета параметров дозовых полей излучателей радиационно-технологических установок [4–6]. При этом подобные программы моделирования требуют задания детерминированной геометрии и состава облучаемой среды (так, для радиационно-терапевтических применений с этой целью широко используется компьютерная томография [3]).

Однако в радиационно-технологических задачах, оперирующих с большими массопотоками обрабатываемой продукции, геометрические и композиционные параметры облучаемых объектов подвержены статистическому разбросу, а их точное измерение невозможно по экономическим причинам. Имеется два общепринятых подхода к решению подобных задач [4]. Один состоит в пренебрежении статистическим разбросом параметров объектов обработки: расчеты ведут для некоего представительного гетерогенного объекта, параметры которого измеряются и задаются с необходимой точностью, вплоть до

применения компьютерной томографии [7]. Альтернативный подход заключается в пренебрежении гетерогенностью объектов, которые заменяют усредненной гомогенной средой, состоящей из взвешенной смеси компонент. Недостатком обоих подходов является невозможность учета влияния статистического разброса параметров объектов обработки на рассчитываемые величины потоков излучения  $I$  и поглощенных доз  $D$ .

Мы предлагаем принципиально иной подход к решению задач о транспорте излучения в гетерогенных объектах радиационной обработки, основанный на их вероятностном описании как случайного поля, характеризуемого заданными функциями распределения плотности и элементного состава материалов. Задача заключается в нахождении функций распределения потоков излучения и поглощенных доз или, по крайней мере, их первых моментов. В настоящей работе мы ограничимся простейшей модельной одномерной геометрией задачи, реализующей подобный подход.

## 1. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ СРЕД

Рассмотрим прохождение параллельного потока первичного  $\gamma$ -излучения через полубесконечную случайную слоистую среду, состоящую из материалов (компонент)  $N$  типов, и ограничимся тремя простейшими вариантами (рис. 1).

В модели случайных слоев (см. рис. 1,а) слои фиксированной толщины  $\delta$  располагаются случайно с характерными для каждого материала заданными вероятностями  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). В модели случайных толщин (см. рис. 1,б) задается квазипериодическая структура чередующихся слоев с распределением

толщин, характеризующимся средними значениями  $\langle \delta \rangle_i$  и дисперсиями  $\sigma_i^2$ . Комбинированная модель (см. рис. 1,в) отвечает случайному распределению как по последовательности слоев различного типа, так и по толщине слоев.

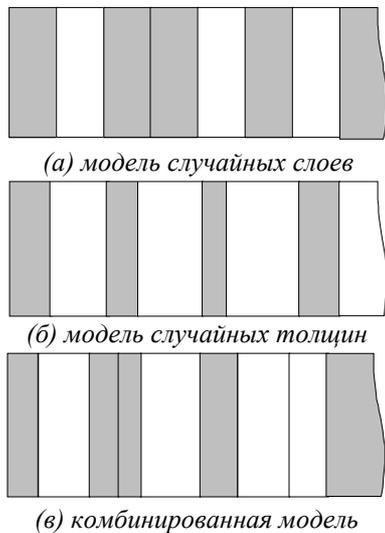


Рис.1. Стохастические модели слоистых сред

Первая модель отражает композиционную неоднородность случайно расположенных геометрически идентичных объектов. Вторая и третья модели акцентирует внимание на разбросе объектов по размерам. Указанные виды слоистых сред можно рассматривать как одномерные случайные процессы относительно глубины  $z$  с корреляционной длиной  $l$  порядка характерной толщины слоев.

## 2. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Аналитическое решение задач прохождения излучения через такие среды в общем виде представляется весьма проблематичным. Не существует общего аналитического метода решения задач, в которых корреляции случайных процессов сравнимы с характерными размерами задачи [8]. Общее решение для таких проблем обычно можно сформулировать либо в пределе белого шума, когда пренебрегают корреляциями, либо в случае малого шума, когда решение можно получить разложением по малому случайному возмущению.

### 2.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Приближение белого шума (когда корреляционная длина  $l$  стремится к нулю) соответствует предельному переходу к усредненной гомогенной среде со средней плотностью  $\rho_{cp}$

$$\rho_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \langle \delta \rangle_i \cdot \rho_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \langle \delta \rangle_i} \quad (1)$$

и усредненным линейным коэффициентом ослабления излучения  $\mu_{cp}$

$$\mu_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \langle \delta \rangle_i \cdot \mu_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \langle \delta \rangle_i}, \quad (2)$$

где  $N$  – количество различных компонент в среде;  $\rho_i$  – плотность  $i$ -ой компоненты среды;  $\langle \delta \rangle_i$  – средняя толщина слоя  $i$ -ой компоненты среды,  $p_i$  – доля слоев  $i$ -ой компоненты в общем количестве слоев (вероятность  $i$ -ой компоненты). Аналогично определяется и усредненное значение линейного коэффициента поглощения энергии излучения  $\mu_{en}$ .

Эти величины позволяют тривиально получить оценку ослабления потока энергии излучения в приближении гомогенизированной среды [9]. Для узкого пучка (УП) оно выражается обычным экспоненциальным спадом с глубиной  $z$

$$I_{zom}^{УП}(z) = I_0 \cdot \exp(-\mu_{cp} \cdot z). \quad (3)$$

Для широкого пучка (ШП)

$$I_{zom}^{ШП}(z) = I_{zom}^{УП}(z) \cdot B(\mu_{cp} \cdot z), \quad (4)$$

где  $B(\mu_{cp} \cdot z)$  – фактор накопления, отвечающий учету вклада рассеянного излучения ( $B > 1$ ).

В приближении гомогенизированной среды поглощенная доза в веществе  $i$ -ой компоненты может быть рассчитана по формуле

$$D_i(z) = \left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_i \cdot I_0 e^{-\mu_{cp} \cdot z} B(\mu_{cp} \cdot z). \quad (5)$$

### 2.2. СЛУЧАЙ МАЛЫХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для узкого пучка можно также достаточно легко получить общее решение в случае, когда относительная разница между параметрами различных материалов мала. В этом случае запишем линейный коэффициент ослабления в виде:

$$\mu(z) = \mu_{cp} + \delta\mu(z), \quad (6)$$

где  $\delta\mu(z)$  представляет собой случайный процесс с нулевым средним и заданной корреляционной функцией  $\langle \delta\mu(z_1) \delta\mu(z_2) \rangle$ , причем выполняется соотношение  $\|\delta\mu(z)\| \ll \mu_{cp}$ . Для потока в этом случае можно записать следующее стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение Ланжевена):

$$\frac{dI(z)}{dz} = -[\mu_{cp} + \delta\mu(z)] \cdot I(z). \quad (7)$$

Из уравнения (7) методом теории возмущений получается следующее выражение для среднего значения потока энергии излучения на глубине  $z$  [8]:

$$\langle I(z) \rangle = I_0 \cdot e^{-\mu_{cp} z} \cdot \left\{ 1 + \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \langle \delta \mu(z_1) \delta \mu(z_2) \rangle \right\}. \quad (8)$$

Член в фигурных скобках имеет вид “фактора накопления” стохастической природы, напрямую связанный с корреляцией показателей ослабления в различных компонентах гетерогенной среды. Если коррелятор представляется в виде

$$\langle \delta \mu(z_1) \delta \mu(z_2) \rangle = A \cdot \mu_{cp}^2 \cdot \exp\left(-\frac{|z_1 - z_2|}{l}\right), \quad (9)$$

где  $A = \text{const}$ , то

$$\langle I(z) \rangle = I_{\text{ср}}^{MII}(z) \times \left\{ 1 + A \cdot (\mu_{cp} \cdot l)^2 \cdot G\left(\frac{z}{l}\right) \right\}, \quad (10)$$

где  $G(\zeta) = \zeta + e^{-\zeta} - 1$ . Очевидно, что  $G(\square) \geq 0$  при  $\square \geq 0$ .

Корреляторы вида (9) при  $A > 0$ , как известно, описывают случайные процессы типа телеграфного или процесса Орнштейна-Уленбека [8]. Отсюда сразу следует замечательный факт: средний поток энергии в слабо стохастических средах подобного типа должен возрастать по сравнению с потоком (3) в соответствующей гомогенизированной среде.

### 3. АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ 3.1. “ДВОЙНОЙ” МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Для моделирования транспорта излучения в случайной слоистой среде методом Монте-Карло необходимо разыгрыш историй не только по большому числу первичных фотонов, но также и по большому числу реализаций случайной среды. Такие нестандартные задачи вследствие значительных накладных расходов на генерацию среды распространения излучения могут потребовать неприемлемых затрат расчетного времени, если программы не обладают достаточной гибкостью в работе с геометрией и материалами.

Использование программного комплекса *Geant4* [10] позволило решить эту задачу с минимальными затратами времени ЭВМ. Методика моделирования в основном совпадала с изложенной нами ранее в работах [11,12]. Однако потребовалась некоторая модификация алгоритмов моделирования, относящаяся к учету стохастичности среды.

В библиотеке *Geant4* основным инструментом управления геометрией в нестандартных случаях задания области подсчета (детектирования) потока или доз является класс C++ *G4VPVParameterisation*. Этот базовый класс позволяет задавать набор геометрических объектов, отличающихся (в зависимости от номера объекта) по значениям некоторых их свойств. Он содержит несколько виртуальных функций, управляющих размером объекта, его положением или типом материала, определяя которые пользователь имеет возможность задавать характеристики среды “на лету”, т.е. в процессе моделирования

транспорта излучения при попадании частицы в данный объем.

В нашей задаче при создании пользовательского класса, наследующего *G4VPVParameterisation*, были определены как функции задания размера и положения объекта, так и функция, задающая материал в данном элементе объема. Область детектирования разбивалась на слои равной толщины с шагом, определяемым минимальной необходимой степенью дискретизации по глубине ( $\Delta z \sim 1$  см). Непосредственно перед розыгрышем каждого первичного фотона в соответствии с одним из алгоритмов раздела 1 заполнялись массивы толщин слоев и указателей на материал каждого из них. Таким образом, транспорт каждой первичной частицы рассматривался в своей реализации случайной среды с заданными параметрами.

### 3.2. ПОДСЧЕТ ДОЗ И ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ

Поглощенная доза в  $i$ -ом материале на глубине  $z$  рассчитывалась как отношение усредненной по  $K$  реализациям траекторий суммарной поглощенной в этом слое энергии излучения к массе слоя на единицу площади при условии, что слой состоит из материала  $i$ -ого типа:

$$D_i(z) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{\Omega_k} \frac{E_{\text{погл}}^{(k)}}{\rho_i \cdot \Delta z}, \quad (11)$$

где  $\Omega_k$  – множество пересечений чувствительного объема (слоя от  $z$  до  $z+\Delta z$ ) для  $k$ -ой истории;  $E_{\text{погл}}$  – поглощенная в этом слое энергия.

Усредненный по реализациям и объему поток энергии излучения (энергетический флюенс) на глубине  $z$  вычислялся по следующей формуле:

$$I(z) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{\Omega_k} \frac{E_k \cdot s_k}{\Delta z}, \quad (12)$$

где  $E_k$  – энергия  $\gamma$ -квантов, пересекающих чувствительный слой, а  $s_k$  – длина их траектории в нем.

### 3.3. ОБОСНОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ УСРЕДНЕНИЙ

Докажем эквивалентность средних значений, получаемых в результате предложенного алгоритма, значениям, полученным с помощью стандартного метода — последовательного усреднения по траекториям в заданной фиксированной геометрии и по реализациям среды. В этом последнем случае усреднение выражается формулой

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \psi_{mk} \quad \text{при } K, M \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где  $\psi_{mk}$  –  $m$ -ая (из  $M$ ) реализация случайной величины  $\psi$  в  $k$ -ой (из  $K$ ) реализации геометрии. Нетрудно показать, что после перестановки порядка суммирования выражение, соответствующее усреднению по геометрии, не может зависеть от номера реализации

случайной величины для заданной геометрии, так как результат не должен зависеть от произвольного порядка нумерации реализаций для заданной геометрии. Следовательно, выполняется соотношение:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi_{mk} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi_{1k} \text{ при } K \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Таким образом, применяемый алгоритм моделирования средних значений для потока энергии или поглощенной дозы действительно позволяет получить интересующие нас величины в статистически неоднородных средах.

К сожалению, этого нельзя сказать о дисперсии распределения средних величин для статистически неоднородных сред, так как для ее корректного получения необходимо среднее значение для каждой реализации геометрии и, как следствие, необходимое время расчета значительно возрастает.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве примера влияния стохастической неоднородности на средние значения потоков энергии и доз нами было промоделировано прохождение широкого параллельного пучка  $\gamma$ -излучения с начальной энергией 1,25 МэВ через слоистые среды, состоящие из слоев двух различных материалов ( $N=2$ ). Рассматривались как комбинации плотных материалов (воды и железа), так и разреженная среда “вода/воздух”.

Были реализованы варианты, описанные в разделе 1. В модели случайных слоев их вероятности считались равными:  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Для случая, когда задавались распределения размеров слоя, их толщины  $\delta$  разыгрывались из распределения, аппроксимирующего нормальное со средними и дисперсиями, заданными для каждого типа материала:

$$f_i(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i} \exp\left(-\frac{(\delta - \langle \delta \rangle_i)^2}{2 \cdot \sigma_i^2}\right). \quad (15)$$

В вырожденном случае ( $\sigma = 0$ ) чередовались слои одинаковой для каждого материала толщины; при этом разыгрывался лишь тип первого слоя.

Статистика счета составляла от 1 до 10 миллионов историй, что обеспечило относительную погрешность результатов, не превышающую 10%.

Результаты моделирования зависимостей средних потоков энергии и средних поглощенных доз от глубины проникновения излучения для различных комбинаций материалов и параметров случайной слоистой двухкомпонентной среды приведены на рис. 2–4.

На каждом из них результаты сравниваются с зависимостями, рассчитанными методом Монте Карло для прохождения широкого пучка через соответствующую однородную двухкомпонентную среду, определенную ранее в разделе 2.1.

Основной вывод, следующий из расчетов мето-

дом Монте-Карло, заключается в систематическом статистически значимом превышении среднего потока энергии на заданной глубине в случайной среде над соответствующим значением, оцененным в приближении гомогенизированной среды. Это различие растет с увеличением глубины  $z$  и более ярко выражено в случае более плотных сред с сильно различающимися эффективными атомными номерами.

Аналогичная тенденция прослеживается и для зависимостей поглощенной дозы в воде от глубины (см. также относительные зависимости на рис. 5, где гладкими линиями показана интерполяция результатов квадратичными полиномами). Сильные флуктуации на рис. 5 обусловлены эффектом перераспределения дозы вблизи границы раздела сред, что при случайном положении границ приводит к дополнительной неопределенности в дозе.

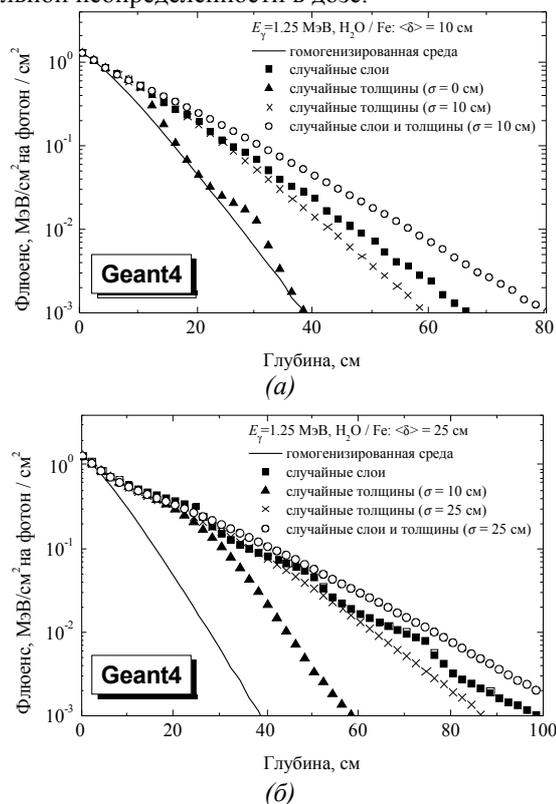


Рис. 2. Результаты моделирования среднего потока энергии в различных вариантах равновероятных слоистых сред “вода/железо” с характерной толщиной слоя 10 см (а) и 25 см (б) для начальной энергии фотонов  $E_\gamma = 1,25$  МэВ

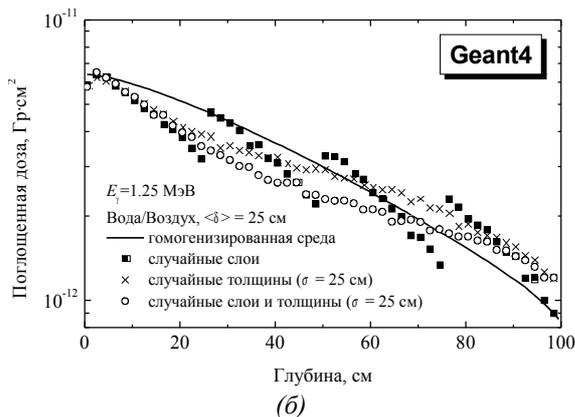
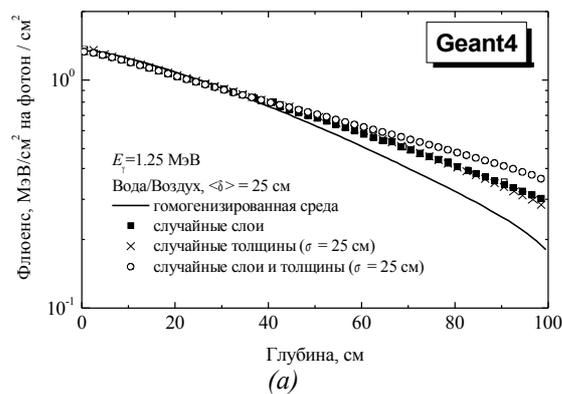


Рис. 3. Средние потоки энергии (а) и поглощенные дозы в воде (б) в случайных слоистых средах “вода/воздух” с характерной толщиной слоя 25 см

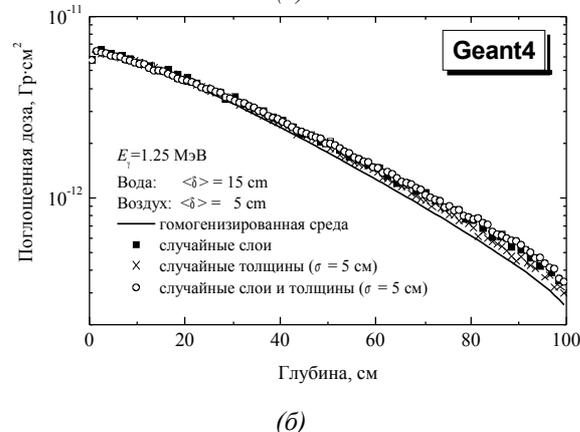
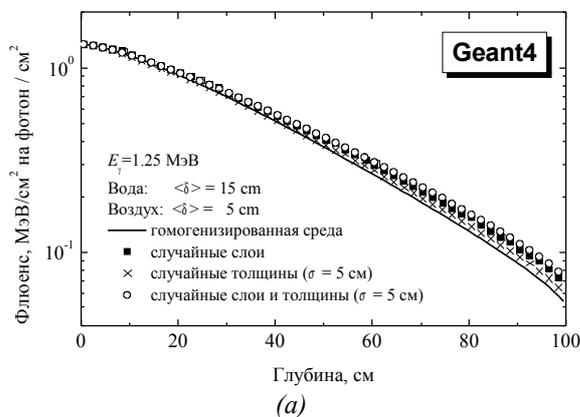


Рис. 4. Средние потоки энергии (а) и поглощенные дозы в воде (б) в системе “вода/воздух” с характерной толщиной слоя воды 15 см и воздуха 5 см

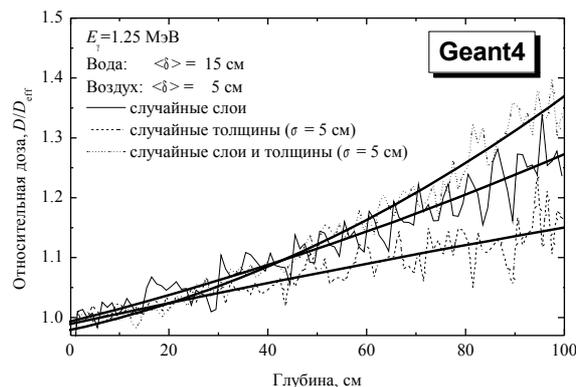


Рис. 5. Результаты моделирования относительной поглощенной дозы в воде в различных вариантах случайных слоистых сред “вода/воздух” с характерной толщиной слоя воды 15 см и слоя воздуха 5 см для  $E_{\gamma} = 1,25$  МэВ

Таким образом, моделирование показало, что случайный характер слоистой среды приводит не только к очевидным флуктуациям потоков и доз, но и к смещению их средних значений относительно величин, следующих из интуитивно очевидной концепции усредненной гомогенной среды. Этот результат качественно согласуется с результатами анализа в п. 2.3, хотя при моделировании, разумеется, малость случайного возмущения не предполагалась.

В силу некоторой неожиданности полученных при моделировании результатов мы попытались использовать простые теоретико-вероятностные модели для их обоснования и подтверждения.

## 5. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Далее при аналитическом рассмотрении мы ограничимся первой из упомянутых в разделе 1 моделей слоистой среды, для которой толщина  $\delta_i$  каждого слоя ( $i = 1, \dots, N$ ) однозначно связана с типом его материала, характеризующегося линейным коэффициентом ослабления излучения  $\mu_i$  и долей  $p_i$  слоев  $i$ -ой компоненты в общем количестве слоев.

### 5.1. ПРОХОЖДЕНИЕ УЗКОГО ПУЧКА ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ДВУХ-СЛОЙНЫХ БАРЬЕР

Рассмотрим сначала простейший случай прохождения узкого пучка гамма-излучения через два слоя. Если толщины и материалы каждого слоя зафиксированы, выражение для потока энергии после прохождения двух слоев имеет вид:

$$I_{\text{фикс}} = I_0 \cdot e^{-(\mu_1 \delta_1 + \mu_2 \delta_2)} \equiv I_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad (16)$$

где  $\lambda_i = \exp(-\mu_i \delta_i)$  – показатель ослабления потока энергии после прохождения слоя  $i$ -ого типа.

Элементарные вероятностные соображения показывают, что для случайной слоистой среды в отсутствие корреляций между слоями выражение для среднего потока после прохождения  $n$  слоев пред-

ставляет собой начальный поток, умноженный на  $n$ -ую степень среднего показателя ослабления потока на одном слое  $\lambda_{cp} = p_1 \cdot \lambda_1 + p_2 \cdot \lambda_2 + \dots + p_n \cdot \lambda_n$ .

Для двух слоев равной вероятности ( $p_1 = p_2 = 1/2$ ) нетрудно показать, что  $I_{som} = I_{фикс}$ , а выражение для среднего потока можно записать в виде

$$I_{cp} = I_0 \cdot \left( \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} \right)^2 = I_0 \cdot \left( \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{4} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \right). \quad (17)$$

Отсюда сразу следует, что среднее значение потока через случайные слои будет всегда не меньше потока через детерминированную среду:

$$\frac{I_{cp}}{I_{фикс}} \equiv \frac{I_{cp}}{I_{som}} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2 \right) \geq 1. \quad (18)$$

При этом гомогенизированные среды в обоих случаях, одинаковы. Формула (7) показывает, что стохастический характер среды будет приводить к уменьшению ее ослабляющей способности (возрастанию потока) в сравнении с гомогенизированной средой. Видно также, что величина эффекта возрастает с ростом отношения  $\lambda$  – показателей гетерогенности слоев.

## 5.2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $N$ -СЛОЙНОГО БАРЬЕРА

Для общего случая узкого пучка в случайной слоистой среде можно записать следующее рекуррентное соотношение для интенсивности потока:

$$I_n = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \exp(-\mu_i \delta_i) \cdot I_{n-1}. \quad (19)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I_n \equiv I_{cp}^{YII}[z(n)] = I_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^N p_i \cdot \exp(-\mu_i \delta_i) \right]^n. \quad (20)$$

Приведенное выше рассмотрение, к сожалению, позволяет однозначно связать средний поток после прохождения  $n$  слоев с глубиной  $z$  только в случае, когда толщины  $\delta_i$  всех слоев равны. В противном случае аналитический переход от дискретного номера слоя к непрерывной глубине  $z$  затруднен.

Для слоев одинаковой толщины  $\delta$  в приближении гомогенизированной среды выражение для потока энергии после  $n$  слоев имеет вид:

$$I_{som}(n\delta) = I_0 \exp(-\mu_{cp} \cdot n\delta), \quad (21)$$

откуда

$$\frac{I_{cp}^{YII}(n\delta)}{I_{som}(n\delta)} = \left\{ \sum_{i=1}^N p_i \cdot \exp[-(\mu_i - \mu_{cp})\delta] \right\}^n. \quad (22)$$

Вводя оператор усреднения

$$\langle \dots \rangle = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (\dots) \quad (23)$$

и учитывая, что при  $\delta = \text{const}$  согласно формуле (2)  $\mu_{cp} = \langle \mu \rangle$ , можно показать, что

$$\frac{I_{cp}^{YII}(n\delta)}{I_{som}(n\delta)} = \left[ \frac{\langle \lambda(\mu) \rangle}{\lambda(\langle \mu \rangle)} \right]^n, \quad (24)$$

где  $\lambda$  – показатель ослабления потока на одном слое.

Нетрудно видеть, что поток после прохождения  $n$  слоев будет не меньше потока в гомогенизированной среде, если выполняется соотношение

$$\langle \lambda(\mu) \rangle \geq \lambda \langle \mu \rangle \quad (25)$$

Анализ показывает, что необходимым условием для выполнения этого соотношения является выполнение неравенства

$$\lambda(\mu) \geq \lambda(\langle \mu \rangle) + \lambda'(\langle \mu \rangle) \cdot (\mu - \langle \mu \rangle). \quad (26)$$

Условие (26) выполняется, если на интервале усреднения по  $\mu$  функция  $\lambda(\mu)$  лежит не ниже касательной к ней в точке  $\mu = \langle \mu \rangle$ . Это заведомо удовлетворяется, если  $\lambda(\mu)$  – экспоненциальная функция. Таким образом, для реалистической функции ослабления узкого пучка первичного излучения утверждение о превышении среднего потока в случайной среде над средним потоком в гомогенизированной среде доказано.

## 5.3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФАКТОРА НАКОПЛЕНИЯ

Однако количественное сравнение расчетов по формуле (24) с результатами моделирования затруднено тем обстоятельством, что в условиях моделирования (для широкого пучка) необходим учет обычного фактора накопления  $B$ , отвечающего вкладу рассеянного и вторичного излучения.

Для однородных сред из легких элементов (комптоновских рассеивателей)  $B(z)$  можно представить в виде [13]:

$$B(z) = 1 + \beta \cdot (\mu z) + \gamma \cdot (\mu z)^2. \quad (27)$$

Для усредненной гомогенизированной среды можно ввести усредненные коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  функции накопления  $B(z)$ . Тогда:

$$I_{som}^{III}(z) = I_{som}^{YII}(z) \cdot \left[ 1 + \beta_{cp} \cdot (\mu_{cp} z) + \gamma_{cp} \cdot (\mu_{cp} z)^2 \right]. \quad (28)$$

Нахождение коэффициентов  $\beta_{cp}$  и  $\gamma_{cp}$  в однородной среде приближенно может быть выполнено методами разложения потока по столкновениям [13,14]. Этот метод может быть применен и к задаче о прохождении широкого пучка через случайную слоистую среду.

Выражение для потока после прохождения  $n$  слоев можно записать в виде:

$$I_{cp}^{III}[z(n)] \equiv I_n = I_n^{(0)} + I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + \dots, \quad (29)$$

где  $I_n^{(k)}$  – поток энергии  $k$ -кратно рассеянных фотонов после  $n$ -ого слоя.

В приближении рассеяния вперед и отсутствия корреляций между слоями (т.е. считая, что вклад в

поток дают только летящие вперед частицы и ослабление потока произвольным слоем не зависит от номера слоя) можно записать следующее рекуррентное выражение для потока энергии  $k$ -кратно рассеянных фотонов:

$$I_n^{(k)} = \sum_{j=0}^k \lambda_{jk} \cdot I_{n-1}^{(j)}, \quad (30)$$

где  $\lambda_{jk}$  – доля потока энергии  $j$ -кратно рассеянных фотонов, перешедшая в поток энергии  $k$ -кратно рассеянных фотонов после прохождения одного слоя. Очевидно, что все  $\lambda_{jk} < 1$ . Можно также показать, что величина диагональных элементов будет падать с ростом числа актов рассеяния:  $1 > \lambda_{00} > \lambda_{11} > \lambda_{22}$ .

При граничных условиях

$$I_0^{(i)} = \begin{cases} I_0 & \text{при } i = 0 \\ 0 & \text{при } i > 0 \end{cases} \quad (31)$$

выражения для потоков энергии вплоть до второго рассеяния имеют вид:

$$I_n^{(0)} = I_0 \lambda_{00}^n; \quad (32)$$

$$I_n^{(1)} = I_0 \lambda_{01} \frac{\lambda_{00}^n - \lambda_{11}^n}{\lambda_{00} - \lambda_{11}}; \quad (33)$$

$$I_n^{(2)} = I_0 \left\{ \lambda_{02} \cdot \frac{\lambda_{00}^n - \lambda_{22}^n}{\lambda_{00} - \lambda_{22}} + \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\lambda_{00} - \lambda_{11}} \cdot \left( \frac{\lambda_{00}^n - \lambda_{22}^n}{\lambda_{00} - \lambda_{22}} - \frac{\lambda_{11}^n - \lambda_{22}^n}{\lambda_{11} - \lambda_{22}} \right) \right\}. \quad (34)$$

В пределе больших  $n$  и, соответственно, больших глубин выражения (33–34) для потока энергии вторичных частиц можно записать в следующем виде:

$$I_n^{(1)} = I_0 \frac{\lambda_{01} \lambda_{00}^n}{\lambda_{00} - \lambda_{11}}; \quad (35)$$

$$I_n^{(2)} = I_0 \frac{\lambda_{00}^n}{\lambda_{00} - \lambda_{22}} \left\{ \lambda_{02} + \frac{\lambda_{01} \lambda_{12}}{\lambda_{00} - \lambda_{22}} \right\}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь случай, когда толщины слоев меньше или порядка длины свободного пробега рассеянных вплоть до некоторого числа раз фотонов. Тогда диагональные члены  $\lambda_{jk}$  можно записать в виде  $\lambda_{kk} = \lambda_{00} - \Delta \lambda_k$  и, полагая  $\Delta \lambda_k$  малым, разложить по нему выражения для потока энергии рассеянных фотонов:

$$I_n^{(1)} = I_0 \cdot \lambda_{00}^n \cdot \left( \frac{n \cdot \lambda_{01}}{\lambda_{00}} - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{\lambda_{01} \cdot \Delta \lambda_1}{\lambda_{00}^2} \right); \quad (37)$$

$$I_n^{(2)} = I_0 \cdot \lambda_{00}^n \cdot \left( \frac{n \cdot \lambda_{02}}{\lambda_{00}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{\lambda_{01} \lambda_{12} - \lambda_{02} \Delta \lambda_2}{\lambda_{00}^2} \right). \quad (38)$$

Отсюда выражение для полного потока в линейном по  $\Delta \lambda_k$  приближении принимает следующий вид:

$$\frac{I_n}{I_0} = \lambda_{00}^n \cdot \left( 1 + \frac{n \cdot (\lambda_{01} + \lambda_{02})}{\lambda_{00}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{(\lambda_{01} \lambda_{12} - \lambda_{01} \Delta \lambda_1 - \lambda_{02} \Delta \lambda_2)}{\lambda_{00}^2} \right). \quad (39)$$

Для таких слоев можно также положить, что  $\lambda_{01} \gg \lambda_{02}$  и  $\lambda_{00} \gg \lambda_{jk}$  для всех  $j \neq k$ . В этом случае выражение (39) примет вид:

$$I_n = I_0 \lambda_{00}^n \cdot \left( 1 + \frac{n \lambda_{01}}{\lambda_{00}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{\lambda_{01} (\lambda_{12} - \Delta \lambda_1)}{\lambda_{00}^2} \right). \quad (40)$$

Если в дальнейшем ограничиться линейным по  $(\lambda_{jk}/\lambda_{00})$  слагаемым, то необходимо получить выражения только для двух коэффициентов  $\lambda_{00}$  и  $\lambda_{01}$ , которые для случайно распределенных слоев фиксированной толщины  $\square$  принимают следующий вид:

$$\lambda_{00} \approx \sum_{i=1}^N p_i \cdot \exp(-\mu_i \delta); \quad (41)$$

$$\lambda_{01} \approx \frac{E_1}{E_0} \cdot \delta \cdot \sum_{i=1}^N p_i \mu_i \exp(-\mu_i \delta), \quad (42)$$

где  $E_1$  – средняя энергия фотонов с первоначальной энергией  $E_0$  после однократного комптоновского рассеяния.

Отсюда следует выражение для среднего потока энергии после прохождения  $n$  слоев:

$$I_{cp}^{III}(n\delta) = I_{cp}^{III}(n\delta) \times \left( 1 + n \cdot \frac{E_1}{E_0} \cdot \delta \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \mu_i \cdot \exp(-\mu_i \delta)}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \exp(-\mu_i \delta)} \right). \quad (43)$$

#### 5.4. КРИТЕРИЙ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Сравнивая выражение (43) с формулой (28) можно получить критерий применимости приближения однородной гомогенизированной среды для случайных слоистых сред. Можно показать, что в случае, когда для каждого типа слоя выполняется условие

$$\mu_i \cdot \delta_i \ll 1 \quad (44)$$

и  $n$  достаточно велико, выражение (43) принимает вид аналогичный потоку энергии (28) в гомогенной среде с усредненными параметрами ослабления.

Таким образом, условие применимости приближения усредненной гомогенизированной среды состоит в малости толщин слоев, измеренных в длинах свободного пробега гамма-излучения в соответствующем материале слоя.

#### 5.5. СРАВНЕНИЕ С ЭВМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

На рис. 6 приведено сравнение результатов моделирования, выполненного с помощью программного комплекса *Geant4*, с результатами расчетов по полученной выше в линейном по  $(\lambda_{jk}/\lambda_{00})$  приближении формулой (43) для потока энергии широкого параллельного пучка.

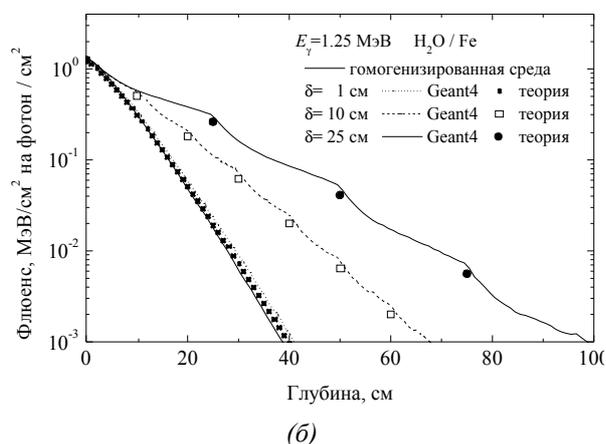
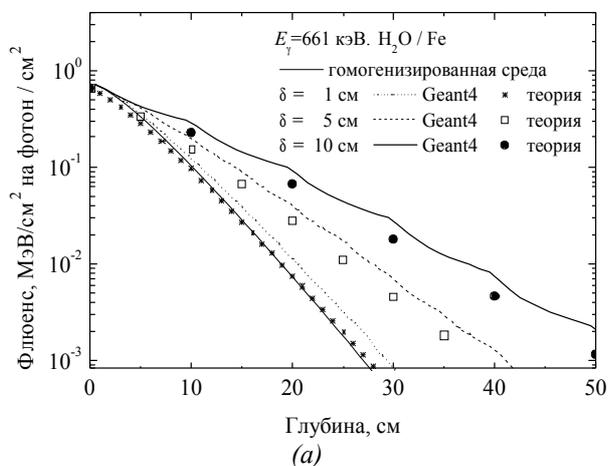


Рис. 6. Сравнение результатов моделирования и аналитического вычисления среднего потока энергии в случайной слоистой среде (вода-железо) для случая различной толщины слоев (1, 10 и 25 см) для энергии гамма-излучения 661 кэВ (а) и 1,25 МэВ (б)

Рассматривались среды, состоящие из двух типов слоев равной толщины, имеющих равные вероятности. В качестве тестовых материалов были взяты вода и железо, что позволяет получить значительный эффект ввиду большой разницы в коэффициентах ослабления. Энергии первичных фотонов отвечали излучению нуклидов  $^{137}\text{Cs}$  (661 кэВ) и  $^{60}\text{Co}$  (1,25 МэВ).

Как видно из представленных рисунков, выражение (43) достаточно хорошо описывает качественное поведение среднего потока энергии с глубиной.

Количественное согласие также можно признать удовлетворительным. Следует отметить, что оно ухудшается с уменьшением энергии первичного излучения. Это обусловлено тем обстоятельством, что при выводе формулы (43) не было учтено рассеяние назад, вклад которого в полный поток растет с

уменьшением энергии фотонов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что характеристики прохождения гамма-излучения через случайно-гетерогенные среды могут заметно отличаться (даже в среднем!) от значений, получаемых в рамках приближения гомогенизированной среды. Качественно эти отличия могут быть описаны в рамках простых вероятностных моделей, однако количественный анализ требует привлечения методов статистического моделирования на ЭВМ.

Развитые в работе вычислительный и аналитический подходы могут оказаться полезными для задач радиационной защиты и дозиметрии в тех областях их применений, в которых по тем или иным причинам невозможна полная детерминистская характеристика среды распространения излучения, а условия (вида (44)) применимости приближения однородной среды не выполняются. Представляется, что одной из таких областей является физическое обоснование новых гамма-радиационных технологий.

В этой области рассмотрение процессов прохождения и поглощения энергии  $\gamma$ -излучения в случайных средах с помощью двойных методов Монте-Карло представляет собой принципиально новый подход. Следует подчеркнуть, что получаемые в его рамках результаты характеризуют не отдельные реализации объектов обработки, а технологию в целом, описываемую статистическими параметрами этих объектов. Развитие методов количественной оценки статистических характеристик типичных технологических объектов радиационной обработки является отдельной важной задачей, рассмотрение которой должно стать предметом дальнейших исследований.

Другими перспективными направлениями развития предложенного подхода должны стать разработка эффективных алгоритмов расчета дисперсий и (в самом общем случае) функций распределения потоков излучения и поглощенных доз многомерными методами Монте Карло, переход от модельных одномерных к трехмерным геометриям, а также установление связи между статистическими характеристиками поглощения энергии гамма-излучения в случайных гетерогенных средах с параметрами теории надежности и стандартами радиационных технологий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Украинского научно-технологического центра, проект УНТЦ № 1801 "Розробка фізичних основ радіаційних технологій з використанням гамма-джерел на базі ізотопів Європію".

## ЛИТЕРАТУРА

I.G. Azuelos et al. *Status of ATLAS liquid argon calorimeter simulations with GEANT4*. CHERP2000,

- Computing in high energy and nuclear physics, (Feb 2000).
- 2.D.W.O. Rogers, B.A. Faddegon, G.X. Ding, C.M. Ma, J. Wei, T.R. Mackie. BEAM: A Monte Carlo code to simulate radiotherapy treatment units // *Med. Phys.* 1995, v. 22, N 5, p. 503 – 524.
- 3.M. Caon, G. Bibbo, J. Pattison. An EGS4-ready tomographic computational model of a 14-year-old female torso for calculating organ doses from CT examinations // *Phys. Med. Biol.* 1999, v. 44, N 9, p. 2213 – 2225.
- 4.A.X. Брегер, Б.И. Вайнштейн, Н.П. Сыркус и др. *Основы радиационно-химического аппаратостроения*. М.: «Атомиздат», 1967, 494 с.
- 5.M. Sohrabpoura, M. Hassanzadehb, M. Shahriarib, M. Sharifzadeha. Dose distribution of the IR-136 irradiator using a Monte Carlo code and comparison with dosimetry // *Radiation Physics and Chemistry*. 2002, v. 63, N 3–6, p. 769 – 772.
- 6.C. Oliveira, J. Salgado, M. Luísa Botelho, L.M. Ferreira. Dose determination by Monte Carlo — a useful tool in gamma radiation process // *Radiation Physics and Chemistry*. 2000, v. 57, N 3–6, p. 667 – 670.
- 7.J. Borsa, R. Chu, J. Sun, N. Linton, C. Hunter. Use of CT scans and treatment planning software for validation of the dose component of food irradiation protocols // *Radiation Physics and Chemistry*. 2002, v. 63, N 3–6, p. 271 – 275.
- 8.Н.Г. Ван Кампен. *Стохастические процессы в физике и химии*. М.: «Высшая школа», 1990. 376 с.
- 9.R.G. Jaeger (ed.). *Engineering Compendium on Radiation Shielding, Vol. 1. Shielding Fundamentals and Methods*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968, 537 p.
- 10.S. Agostinelli, J. Allison, K. Amako, J. Apostolakis et al. Geant4 — a simulation toolkit // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. v. 22, N 3, p. 250 – 303.
- 11.М.И. Братченко, С.В. Дюльдя. Применение программного комплекса Geant4 к задачам радиационно-технологического моделирования // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: «Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение»*. 2001, в. 4(80), с. 117 – 120.
- 12.С.В. Дюльдя, В.В. Рожков, М.И. Братченко и др. Методы компьютерного эксперимента в физике гамма-радиационных технологий с использованием новых источников излучения // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: «Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение»*. 2001, в. 4(80), с. 121 – 128.
- 13.Г.В. Горшков. *Проникающее излучение радиоактивных источников*. Л.: «Наука», 1967, 395 с.
- 14.А.М. Кольчужкин, В.В. Учайкин. *Введение в теорию прохождения частиц через вещество*. М.: «Атомиздат», 1978, 256 с.

## ЕВОЛЮЦІЯ ПОТОКУ ТА ПОГЛИНАННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ У ШАРУВАТИХ ВИПАДКОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ: ТЕОРІЯ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

*С.В. Дюльдя, М.И. Братченко*

Запропонований підхід до опису взаємодії  $\gamma$ -випромінювання з гетерогенними об'єктами, який полягає у їх трактуванні як випадкових середовищ із заданими розподілами щільності та елементного складу. На основі бібліотеки класів *Geant4* побудований “подвійний” метод Монте Карло моделювання транспорту випромінювання в таких середовищах. Для одновимірної геометрії шаруватого середовища знайдений ефект зростання середніх потоків та поглинених доз у випадкових середовищах у порівнянні з результатами розрахунків у усередненому гомогенному середовищі. Запропоновані аналітичні імовірнісні моделі, що з'ясовують причини цього ефекту.

## FLUENCE EVOLUTION AND ABSORPTION OF RADIATION IN LAYERED RANDOM MEDIA: THEORY AND COMPUTER MODELING

*S.V. Dyuldy, M.A. Bratchenko*

Proposed is an approach to the description of interaction of gamma radiation with heterogeneous objects that consists in their treatment as random media with definite distributions upon density and composition. Basing on *Geant4* class library an algorithm of “double” Monte Carlo modeling has been built for computer simulation of radiation transport in such kind of media. For the case of one-dimensional layered structures the effect of mean flux and absorbed dose enhancement in stochastic media in comparison with calculation results for homogenized medium has been observed, and analytical stochastic models have been proposed to explain this effect.