УДК 548.4

ФУНКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ НЕЙТРОНА И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

В.Д. Русов, В.А. Тарасов, С.И. Косенко, С.А. Чернеженко
Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина

Широко применяемые в физике реакторов аналитические приближения для плотности потока замедляющихся нейтронов типа спектра Ферми включают в себя в качестве сомножителя функцию вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона, полученную при определенных ограничительных предположениях о допустимой ширине резонансов. С помощью теории мультипликативного интеграла (интеграл Вольтерра) для коммутативной алгебры без ограничивающих предположений строго получено аналитическое выражение для функции вероятности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ядерные реакции, идущие через составное ядро, подразделяются на резонансные и нерезонансные. Как известно, энергия ядра может принимать только дискретный ряд значений, соответствующих уровням ядра. Однако представление об уровнях с точно фиксированной энергией справедливо только в отношении основных состояний стабильных ядер (невозбужденные уровни). Все остальные (возбужденные) уровни не обладают определенной энергией – они в той или иной степени «размазаны» по энергии. Оценку ширины Γ_i (i – индекс уровня) размытия уровня можно получить из соотношения неопределенностей время–энергия. Согласно этой оценке $\Delta E_i = \Gamma_i = \hbar/\tau_i$, где τ_i – время жизни уровня. Ядро может возбуждаться при взаимодействии с какой-либо налетающей на него частицей, только если энергия его возбуждения, вызванного этим взаимодействием, соответствует разности энергий между его уровнями. Поэтому и составное ядро может образовываться лишь в случае, когда энергия налетающей частицы такова, что вызываемая при взаимодействии с ней энергия возбуждения составного ядра попадает в интервал неопределенности Γ_i положения соответствующего уровня составного ядра (если ядро до взаимодействия находилось в основном состоянии). При ширине уровней составного ядра меньше расстояний между ними и при фиксированной энергии налетающих частиц реакция может идти лишь через какой-либо i-й одиночный уровень. Зависимость сечения реакции от энергии налетающей частицы будет носить резонансный характер. Соответственно реакции такого типа называются резонансными. Если же уровни расположены настолько густо, что расстояния между ними меньше их ширины, то они сливаются друг с другом, и реакция будет идти при любой энергии налетающей частицы. Такие реакции называются нерезонансными. Как известно, форма резонансов описывается формулой Брейта-Вигнера.

Как известно, для реакторных нейтронных ядерных реакций делящихся нуклидов резонансная область в зависимости от энергий нейтронов располагается в интервале 0,5…1000 эВ (например [3] и рис. 1).

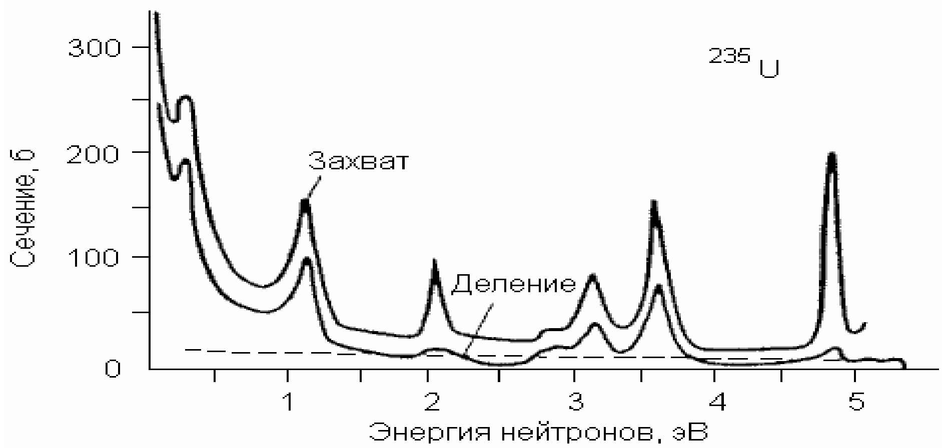

Рис. 1. Зависимости сечения захвата и сечения деления ^{235}U нейтронами от их энергии. Пунктир – сечение рассеяния нейтронов

Для многих расчетных задач физики ядерных реакторов актуальной проблемой остается определение спектра нейтронов для замедляющей среды с резонансным поглощением. Применяются как численные методы решения дифференциально-интегрального уравнения для плотности потока замедляющихся нейтронов в среде с резонансным поглощением, так и широко распространенные в физике реакторов аналитические приближения для плотности потока типа спектров Ферми. Спектры Ферми включают в себя в качестве сомножителя функцию вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона. Выражения для этой функции вероятности получают при определенных ограничительных предположениях о допустимой ширине резонансов. При этом используются приближения узких, широких (приближение бесконечной массы) и промежуточных резонансов. Поэтому в зависимости от свойств ядер, составляющих среду замедления и поглощения для нейтронов, обычно применяется то или иное приближение.

В работе показано, что функцию вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона (отметим, что поглощение нейтрона является противоположным событием, и поэтому функция вероятности поглощения равна единица минус функция вероятности избежать поглощения) можно записать в виде мультипликативного интеграла (интеграл Вольтерра) [1]. С помощью теории мультипликативного интеграла для коммутативной алгебры [2] без ограничивающих предположений строго получено аналитическое выражение для этой функции.

2. ФУНКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ИЗБЕЖАТЬ РЕЗОНАНСНОГО ЗАХВАТА В ПРИБЛИЖЕНИИ УЗКИХ РЕЗОНАНСОВ (СТАНДАРТНЫЙ ПОДХОД)

Спектр Ферми для замедляющей среды с резонансным поглощением согласно [3,4] имеет вид:

$$\Phi_{\Phi}(E)=\frac{S}{\bar{\xi}\Sigma_t E}\cdot\varphi(E), \qquad (1)$$

где $\varphi(E)$ – функция вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона; S – полная объемная скорость генерации нейтронов; $\bar{\xi}=\sum_i\left(\xi_i\Sigma_s^i\right)/\Sigma_s$, ξ_i – среднелогарифмический декремент потери энергии; Σ_s^i – макросечение рассеяния и Σ_a^i – макросечение поглощения для i-го нуклида; $\Sigma_t=\sum_i\Sigma_s^i+\Sigma_a^i$ – полное макросечение делящегося вещества, $\Sigma_s=\sum_i\Sigma_s^i$ – полное макросечение рассеяния делящейся среды.

В физике реакторов [3,4] для получения функции вероятности $\varphi(E)$ применяется следующий стандартный подход. Согласно стандартной теории замедления и рис. 2, на котором резонансная область для сечения поглощения нейтрона показана для наглядности в упрощенном, схематическом виде, вероятность того, что нейтрон не будет поглощен при попадании в область первого резонанса записывается в следующем виде:

$$\varphi_1=1-\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_1}{E_1}, \qquad (2)$$

где Σ_a – макросечение поглощения; E_1 – энергия первого резонанса и ΔE_1 – его ширина (см. рис. 2).

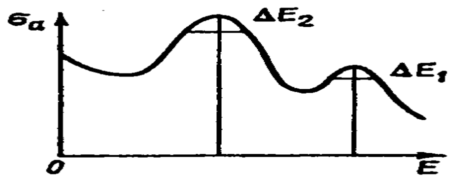

Рис. 2. Далеко отстоящие друг от друга резонансы E_1 и E_2 (ΔE_1, ΔE_2 – ширина первого и второго резонансов)

Вероятность того, что нейтрон не будет поглощен при попадании в область второго резонанса с энергией E_2 и шириной ΔE_2 имеет следующий вид:

$$\varphi_2=\left[1-\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_1}{E_1}\right]\times \times\left[1-\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_2}{E_2}\right]. \qquad (3)$$

Таким образом, аналогично имеем функцию вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона:

$$\varphi(E)=\prod_{i=1}^{N}\varphi_i=\prod_{i=1}^{N}\varphi(E_i)= =\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_i}{E_i}\right). \qquad (4)$$

где N – число резонансов.

Затем, чтобы перейти от произведения к суммированию, берется логарифм от функции $\varphi(E)$, задаваемой выражением (4):

$$\ln\varphi(E)=\prod_{i=1}^{N}\ln\left(1-\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_i}{E_i}\right)= =\prod_{i=1}^{N}\ln\left(1-x_i\right), \qquad (5)$$

где $$x_i=\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_i}{E_i}.$$

Далее каждое перемножаемое, входящее в выражение (5), при предположении $\frac{\Delta E_i}{E_i}<<1$ разлагается в ряд по малой величине x_i. Ограничившись только первым членом разложения, получаем следующее выражение:

$$\ln\varphi(E)\approx-\sum_{i=1}^{N}\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\left(\Sigma_s+\Sigma_a\right)}\frac{\Delta E_i}{E_i}. \qquad (6)$$

Разобьем резонансную область на m энергетических интервалов шириной ΔE_j. При этом в интервалах между резонансами полагаем $\Sigma_a = 0$, тогда для (6) получим:

$$\ln\varphi(E) \approx -\sum_{j=1}^{m} \frac{\Sigma_a}{\overline{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)} \frac{\Delta E_j}{E_j}. \quad (7)$$

Если перейти от логарифма к экспоненте и m устремить к бесконечности, то для всей резонансной области энергий от E_0 до E_f имеем:

$$\phi(E) \approx \lim_{m\to\infty} \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} \frac{\Sigma_a}{\overline{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)} \frac{\Delta E_j}{E_j} \right) =$$

$$= \exp\left(-\int_{E_0}^{E_f} \frac{\Sigma_a}{\overline{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)} \frac{dE}{E} \right). \quad (8)$$

Спектр Ферми (1) с функцией вероятности $\varphi(E)$ в экспоненциальном виде (8) называется приближением узких резонансов.

3. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ *A*

Основные конструкции, связанные с мультипликативным интегралом, возникают в различных разделах математики, механики и физики и, как следует из вышеприведенных разд. 1 и 2, в физике ядерных реакций и ядерных реакторов. Однако нельзя сказать, что в настоящее время теория мультипликативного интеграла является «особо популярной» среди математиков и физиков. Дадим определение мультипликативного интеграла согласно [1]. Пусть A – произвольная ассоциативная топологическая алгебра с единицей E и $f(t)$ – функция вещественного переменного t, принимающая значения в алгебре A, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \le b$, $[a,b] = \{t \in \mathbf{R}, a \le t \le b\}$, T – разбиение отрезка $[a, b]$ точками

$t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n = b$,

$t_i \le t_{i+1}, i = 0, 1, 2, ..., n-1$;

$l(T) = \max(t_{i+1} - t_i)$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Рассмотрим следующее произведение:

$$\prod(f,T) = (E + f(t_0)\Delta t_0)\times \times(E + f(t_1)\Delta t_1)...(E + f(t_n)\Delta t_n). \quad (9)$$

Если при любом изменении T, при котором $l(T) \to 0$, произведение $\prod(f,T)$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется мультипликативным интегралом функции $f(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается через

$$\overset{\cup}{\int_a^b} E + f(t)dt. \quad (10)$$

Аналогичным образом по $f(t)$ и T можно построить следующее:

$$^{\cap}\prod(f,T) = (E + f(t_n)\Delta t_n)\times \times(E + f(t_{n-1})\Delta t_{n-1})...(E + f(t_0)\Delta t_0). \quad (11)$$

Когда при любом изменении T, при котором $l(T) \to 0$, произведение $^{\cap}\prod(f,T)$ стремится к некоторому пределу, этот предел дает другой тип мультипликативного интеграла функции $f(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается через

$$\overset{\cap}{\int_a^b} E + f(t)dt. \quad (12)$$

Мультипликативные интегралы (10) и (11) соответственно называются прямым и обратным.

Далее рассмотрим частный случай приложения мультипликативного интеграла. Пусть алгебра A коммутативна, тогда согласно [1,2]

$$\overset{\cap}{\int_a^b} E + f(t)dt = \lim_{l(T)\to 0} (E + f(t_0)\Delta t_0)\times$$

$$\times(E + f(t_1)\Delta t_1)...(E + f(t_n)\Delta t_n) =$$

$$= \lim_{l(T)\to 0}\Big[E + \sum f(t_i)\Delta t_i +$$

$$+ \sum_{i\langle j} f(t_i)f(t_j)\Delta t_i \Delta t_j +$$

$$+ \sum_{i\langle j\langle k} f(t_i)f(t_j)f(t_k)\Delta t_i \Delta t_j \Delta t_k + ...\ \Big] =$$

$$= \lim_{l(T)\to 0}\left[\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n\right], \quad (13)$$

где $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ – элементарные симметрические полиномы от переменных $f(t_0)\Delta t_0$, $f(t_1)\Delta t_1$, $f(t_2)\Delta t_2$, ..., $f(t_n)\Delta t_n$.

Пусть $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ – симметрические полиномы Ньютона от тех же переменных:

$$\rho_k = \sum_i \left[f(t_i)\Delta t_i\right]^k, \quad k = 1, 2, ..., n. \quad (14)$$

Легко увидеть, что

$$\lim_{l(T)\to 0} \rho_k = \begin{cases} 0, & k > 0, \quad k \ne 1, \\ \int_a^b f(t)dt, & k = 1, \end{cases} \quad (15)$$

где $\int_a^b f(t)dt$ – риманов интеграл.

Разлагая полиномы σ_k по ρ_l $(k, l = 1, 2, ..., n)$ и применяя равенство (15), вычисляем

$$\lim_{l(T)\to 0} \sigma_k. \quad (16)$$

Известно, что

$$\rho_m - \rho_{m-1}\sigma_1 + \rho_{m-2}\sigma_2 + + ...\rho_1\sigma_{m-1}(-1)^{m-1} + (-1)^m \sigma_m = 0,$$
$$m = 1, 2, ..., n, \quad (17)$$

отсюда следует:

$$\lim \sigma_1 = \lim \rho_1 = \int_a^b f(t)dt \,,$$

$$\lim \sigma_2 = \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \Big/ 2!\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim \sigma_n = \left(\int_a^b f(t)dt \right)^n \Big/ n! \qquad (18)$$

и в результате (учитывая $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ и при $l(T) \to 0 \;\; n \to \infty$) получаем

$$\overset{\cup}{\int_a^b} E + f(t)dt = \exp\left(\int_a^b f(t)dt \right) . \qquad (19)$$

В силу симметрии выражения (13), очевидно, что для обратного мультипликативного интеграла также получаем следующее равенство:

$$\overset{\cap}{\int_a^b} E + f(t)dt = \exp\left(\int_a^b f(t)dt \right) . \qquad (20)$$

4. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ИЗБЕЖАТЬ РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ ЗАМЕДЛЯЮЩЕГО НЕЙТРОНА

Согласно вышеизложенному легко устанавливается соответствие между теорией функции вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона, которая является вещественной скалярной функцией и, следовательно, – также частным случаем коммутативной алгебры *A* и мультпликативным интегралом. Действительно, согласно разд. 3, в этой коммутативной алгебре *A* единичным элементом *E* является вещественная единица 1 и $f(E) = -\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)E}$ – скалярная функция вещественного аргумента *E*, принимающая значения в алгебре вещественных чисел *A*, $E_0, E_f \in \mathbf{R}$, $E_0 \le E_f$, $\lfloor E_0, E_f \rfloor = \{ E \in \mathbf{R}, E_0 \le E \le E_f \}$, *T* – разбиение отрезка $\lfloor E_0, E_f \rfloor$ точками $t_1 = E_0,\ t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n = E_f$, $t_i \le t_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $l(T) = \max(t_{i+1} - t_i)$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Тогда для функции вероятности избежать резонансного поглощения согласно (4) при разбиении *T* отрезка $\lfloor E_0, E_f \rfloor$ получим:

$$\phi(E) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\,(\Sigma_s + \Sigma_a)\,E_i} \Delta E_i \right) =$$

$$= \lim_{l(T)\to 0} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + f(E_i)\Delta E_i \right) = \overset{\cap}{\int_{E_0}^{E_f}} E + f(t)dt, \qquad (21)$$

где $f(E) = -\frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)E}$.

Следовательно, с учетом (20) получим окончательное выражение:

$$\varphi(E) = \exp\left(-\int_E^{E_f} \frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}(\Sigma_s + \Sigma_a)E} dE \right). \qquad (22)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что функцию вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона можно записать в виде мультипликативного интеграла. С помощью результатов приложения теории мультипликативного интеграла для коммутативной алгебры строго получено аналитическое выражение функции вероятности избежать резонансного поглощения для замедляющегося нейтрона. Оказалось, что выражение для спектра Ферми, записанное с использованием полученной функции вероятности, совпадает с выражением для спектра Ферми, известным как приближение узких резонансов, но является уже точным, а не приближенным, и поэтому не имеет ограничений.

Отметим, что, так как и для других резонансных ядерных реакций используются приближения узких резонансов, то полученные результаты могут быть обобщены для более широкого круга проблем ядерной физики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. J.D. Dollard, Ch.N. Friedman. *Product integration with applications to differential equations*. London: Addison-Wesley Publ. Co., 1979.
2. О.В. Мантуров. Мультипликативный интеграл // *Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»*. 1990, №22, с. 167-215.
3. Г.Г. Бартоломей, Г.А. Бать, В.Д. Байбаков, М.С. Алхутов. *Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов.* М.: «Энергоатомиздат», 1989.
4. Широков С.В. *Физика ядерных реакторов*. Киев: «Наукова думка», 1992.

Статья поступила в редакцию 13.12.2010 г.

ФУНКЦІЯ ІМОВІРНОСТІ РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛИНАННЯ НЕЙТРОНА ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИЙ ІНТЕГРАЛ

В.Д. Русов, В.А. Тарасов, С.І. Косенко, С.А. Черненженко

Широко вживані у фізиці реакторів аналітичні наближення для щільності потоку замедляющихся нейтронів типа спектру Фермі включають як співмножник функцію вірогідності уникнути резонансного поглинання для нейтрона, що сповільнюється, отриману при певних огранічительних припущеннях про допустиму ширину резонансів. За допомогою теорії мультиплікативного інтеграла (інтеграл Вольтерра) для комутативної алгебри без обмежуючих припущень строго отримано аналітичне вираження для функції вірогідності.

THE FUNCTION OF RESONANCE ABSORPTION PROBABILITY FOR THE NEUTRON AND MULTIPLICATE INTEGRAL

V.D. Rusov, V.A. Tarasov, S.I. Kosenko, S.A. Chernezhenko

Are applied as numerical methods of the decision to the integrated equation for flux of slowed down neutrons with environment with resonant absorption, and widely used in physics of reactors analytical approach for flux, including as a factor function of probability to avoid resonance absorption for the slowed down neutron, received at the certain restrictive assumptions of allowable width of resonances. With the help of the theory of multiplicate integral (integral Volterra). for commutative algebras without limiting assumptions analytical expression for function of probability to avoid resonance absorption for a slowed down neutron is strictly received.