УДК 621.384.6.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ

Н.И. Айзацкий, Е.Ю. Крамаренко
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Харьков, Украина
E-mail: aizatsky@kipt.kharkov.ua

Приведены результаты разработки новой математической модели поперечной неустойчивости электронных пучков в замедляющих структурах, представляющих собой цепочки связанных резонаторов. Разработанная модель позволяет моделировать самосогласованную поперечную динамику электронных пучков с учетом как многочастотной структуры аксиально-несимметричных колебаний неоднородной замедляющей структуры, так и сложного характера поперечного движения частиц пучка в таких полях.

1. ВВЕДЕНИЕ

При взаимодействии электронных пучков с замедляющими структурами (СВЧ-приборы, ускорители заряженных частиц) наряду с основным (рабочим) типом электромагнитных колебаний всегда происходит возбуждение побочных типов колебаний. Наиболее опасными являются гибридные аксиально-несимметричные колебания (HEM − Hybrid Electro-Magnetic), обратное воздействие которых на пучок приводит к отклонению частиц в поперечном направлении и, при определенной амплитуде поля (зачастую довольно низкой), к выбросу частиц на стенки. Такое явление носит название поперечной неустойчивости (transverse instability, beam blow-up instability, beam break-up instability, beam pulse shortening).

В односекционном ускорителе при токах, превышающих некий порог (стартовый или пороговый ток), рост амплитуд этих колебаний может происходить во времени по экспоненциальному закону $\exp(\delta t)$ (регенеративная неустойчивость). При токах, превышающих другой, больший порог (критический ток), частицы в конце импульса тока выбрасываются на стенки ускоряющей структуры. В многосекционном ускорителе рост амплитуд HEM-колебаний может происходить как во времени, так и вдоль ускорителя (кумулятивная неустойчивость). Практически во всех многосекционных ускорителях кумулятивная неустойчивость начинается при токах, меньших стартового тока регенеративной неустойчивости, и, следовательно, именно кумулятивная неустойчивость ограничивает величину ускоряемого тока. Существуют два основных вопроса, на которые необходимо ответить при оценке влияния процесса возбуждения HEM-колебаний на характеристики многосекционного ускорителя. Во-первых, необходимо оценить пороговый (стартовый) ток регенеративной неустойчивости в первой секции. Этот пороговый ток должен быть много больше рабочего тока. Во-вторых, необходимо изучить характер роста поперечных отклонений вдоль ускорителя и определить степень «раздувания» пучка в поперечных направлениях. Данная работа посвящена дальнейшему развитию математической модели поперечной неустойчивости электронных пучков в замедляющих структурах, представляющих собой цепочки связанных резонаторов (см., например, [1-6]).

2. УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ E_{110}-КОЛЕБАНИЙ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Рассмотрим процесс возбуждения электронным пучком E_{110}-колебаний в цепочке N связанных цилиндрических резонаторов (отрезке круглого диафрагмированного волновода). Будем предполагать, что поперечная динамика полностью определяется воздействием на частицы E_{110}-колебаний, возбуждаемых пучком.

При цилиндрической симметрии существуют два собственных E_{110}-колебания, имеющие угловую зависимость $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$. Собственные частоты этих колебаний в цилиндрическом резонаторе одинаковы, ω_n. Собственные функции для продольной компоненты выберем в следующем виде:

$$E_z = J_1\left(\frac{\lambda_{1,1}}{b} r\right)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \approx \frac{\omega_n}{2c}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где b – радиус резонатора, $\lambda_{1,1}$ – первый корень функции Бесселя первого порядка.

Первую поляризацию везде ниже будем называть x-поляризацией, вторую – y-поляризацией. Поскольку[1]

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega_n \mu_0} rot\vec{E}, \qquad (2)$$

то

$$\vec{H}_r = -\frac{i}{Z_0}\frac{J_1(\lambda_{1,1} r/b)}{\lambda_{1,1} r/b}\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

$$\vec{H}_\varphi = \frac{i}{Z_0} J_1'(\lambda_{1,1} r/b)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – сопротивление вакуума.

При $r << b$

$$H_r \approx \frac{i}{2Z_0}\begin{pmatrix}\sin(\varphi)\\ -\cos(\varphi)\end{pmatrix}, \quad H_\varphi \approx \frac{i}{2Z_0}\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

[1] Зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega_n t)$.

Представим поле в каждом резонаторе в виде

$$\vec{E}_n = \sum_{q=x,y} \mathcal{E}_{n,q}(t)\vec{E}_{n,q}(r),\ \vec{H}_n = i\sum_{q=x,y} \mathcal{H}_{n,q}(t)\vec{H}_{n,q}(r), \quad (5)$$

где $q = x$ соответствует x-поляризации; $q = y$ соответствует y-поляризации; n = 1, 2, …, N – номер резонатора.

Предположим, что собственные частоты структуры, состоящей из N связанных резонаторов, мало отличаются от собственных частот резонаторов: $\omega = \omega_n + \delta\omega$. В уравнениях для амплитуд поля пренебрежем слагаемыми, пропорциональными квадрату малого параметра ($\sim \delta\omega \cdot \mu$, μ – коэффициент связи). Тогда исходную систему уравнений для амплитуд поля запишем в следующем виде:

$$\frac{d^2\mathcal{H}_{n,q}}{dt^2} + \frac{\omega_{n,q}}{Q_{n,q}}\frac{d\mathcal{H}_{n,q}}{dt} + \tilde{\omega}^2_{n,q}\mathcal{H}_{n,q} = \\ = \omega^2_{n,q}\left(\mu^+_{n,q}\mathcal{H}_{n+1,q} + \mu^-_{n,q}\mathcal{H}_{n-1,q}\right) + \frac{\omega_{n,q}}{N_{n,q}}\int_{V_n}\vec{j}\vec{E}_{n,q}dV, \quad (6)$$

где n = 1, 2, …, N, $\omega_{n,q} = \lambda_{1,1}c/b_n$, $\tilde{\omega}^2_{n,q} = \omega^2_{n,q}\left(1-\mu^+_{n,q}-\mu^-_{n,q}\right)$, $\mu^+_{n,q}$ и $\mu^-_{n,q}$ – коэффициенты связи n-го с (n + 1)-м и (n – 1)-м резонаторами, ($\mu < 0$), $N_{n,q} = \varepsilon_0\pi d_n b_n^2 J_0^2\left(\lambda_{1,1}\right)/2$ – норма E_{110}-колебания, d_n – длина n-го резонатора.

2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Преобразуем уравнения возбуждения (на примере $\mathcal{H}_{n,x}$):

$$\frac{d^2\mathcal{H}_{n,x}}{dt^2} + \frac{\omega_{n,x}}{Q_{n,x}}\frac{d\mathcal{H}_{n,x}}{dt} + \tilde{\omega}^2_{n,x}\mathcal{H}_{n,x} = \\ = \omega^2_{n,x}\left(\mu^+_{n,x}\mathcal{H}_{n+1,x} + \mu^-_{n,x}\mathcal{H}_{n-1,x}\right) + F_{n,x}(t), \quad (7)$$

где n = 1, 2, …, N и

$$F_{n,x}(t) = \frac{\omega_{n,x}}{N_{n,x}}\int_{V_n}\vec{j}\vec{E}_{n,x}dV. \quad (8)$$

Будем искать решение (7) в виде

$$\mathcal{H}_{n,x} = h^{(1)}_{n,x}(t)\exp\left(p^{(1)}_{n,x}t\right) + h^{(2)}_{n,x}(t)\exp\left(p^{(2)}_{n,x}t\right), \quad (9)$$

где $p_{n,x}$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$p^2_{n,x} + \frac{\omega_{n,x}}{Q_{n,x}}p_{n,x} + \tilde{\omega}^2_{n,x} = 0. \quad (10)$$

Получим

$$p^{(1,2)}_{n,x} = -\frac{\omega_{n,x}}{2Q_{n,x}} \mp i\sqrt{\tilde{\omega}^2_{n,x} - \left(\frac{\omega_{n,x}}{2Q_{n,x}}\right)^2} \approx \\ \approx -\omega_0\alpha_{n,x} \mp i\omega_0\Omega_{n,x}, \quad (11)$$

где ω_0 – рабочая частота ускоряющего поля, $\alpha_{n,x} = \omega_{n,x}/\left(2Q_{n,x}\omega_0\right)$, $\Omega_{n,x} \approx \tilde{\omega}_{n,x}/\omega_0$.

Из уравнения (11) следует, что $p^{(2)}_{n,x} = p^{(1)*}_{n,x}$.

Наложим дополнительное условие:

$$\frac{dh^{(1)}_{n,x}}{dt}\exp\left(p^{(1)}_{n,x}t\right) + \frac{dh^{(2)}_{n,x}}{dt}\exp\left(p^{(2)}_{n,x}t\right) = 0. \quad (12)$$

Тогда из (7) с учетом (9) и (12) получим:

$$\left(p^{(1)}_{n,x} - p^{(2)}_{n,x}\right)\frac{dh^{(1)}_{n,x}}{dt} = F_{n,x}(t)\exp\left(-p^{(1)}_{n,x}t\right) + \\ + \omega^2_{n,x}\exp\left(-p^{(1)}_{n,x}t\right) \times \\ \times\left[\mu^+_{n,x}\left(h^{(1)}_{n+1,x}\exp\left(p^{(1)}_{n+1,x}t\right) + h^{(2)}_{n+1,x}\exp\left(p^{(2)}_{n+1,x}t\right)\right) + \right. \\ \left. + \mu^-_{n,x}\left(h^{(1)}_{n-1,x}\exp\left(p^{(1)}_{n-1,x}t\right) + h^{(2)}_{n-1,x}\exp\left(p^{(2)}_{n-1,x}t\right)\right)\right] \quad (13.1)$$

$$-\left(p^{(1)}_{n,x} - p^{(2)}_{n,x}\right)\frac{dh^{(2)}_{n,x}}{dt} = F_{n,x}(t)\exp\left(-p^{(2)}_{n,x}t\right) + \\ + \omega^2_{n,x}\exp\left(-p^{(2)}_{n,x}t\right) \times \\ \times\left[\mu^+_{n,x}\left(h^{(1)}_{n+1,x}\exp\left(p^{(1)}_{n+1,x}t\right) + h^{(2)}_{n+1,x}\exp\left(p^{(2)}_{n+1,x}t\right)\right) + \right. \\ \left. + \mu^-_{n,x}\left(h^{(1)}_{n-1,x}\exp\left(p^{(1)}_{n-1,x}t\right) + h^{(2)}_{n-1,x}\exp\left(p^{(2)}_{n-1,x}t\right)\right)\right], \quad (13.2)$$

где n = 1, 2, …, N.

Из уравнений (13) следует, что $h^{(2)}_{n,x} = h^{(1)*}_{n,x}$, а следовательно, $\mathcal{H}_{n,x}$ – действительные величины.

Проинтегрируем уравнения (13) по времени. Для $h^{(1)}_{n,x}$ получим (аналогичные уравнения получаются и для $h^{(2)}_{n,x}$):

$$\left(p^{(1)}_{n,x} - p^{(2)}_{n,x}\right)h^{(1)}_{n,x} = \int_0^t F_{n,x}(t')\exp\left(-p^{(1)}_{n,x}t'\right)dt' + \\ + \omega^2_{n,x}\mu^+_{n,x}\int_0^t dt'\left[h^{(1)}_{n+1,x}\exp\left(\left(p^{(1)}_{n+1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right) + \right. \\ \left. + h^{(2)}_{n+1,x}\exp\left(\left(p^{(2)}_{n+1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right)\right] + \\ + \omega^2_{n,x}\mu^-_{n,x}\int_0^t dt'\left[h^{(1)}_{n-1,x}\exp\left(\left(p^{(1)}_{n-1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right) + \right. \\ \left. + h^{(2)}_{n-1,x}\exp\left(\left(p^{(2)}_{n-1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right)\right], \quad (14)$$

где n = 1, 2, …, N.

Таким образом, систему дифференциальных уравнений мы свели к системе связанных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Будем предполагать, что за время $\Delta t = T_0/M = 2\pi/\omega_0 M$, M – целое число, $h^{(1)}_{n,x}(t)$ мало изменяются. Введем временную сетку $t_k = k\cdot\Delta t$ и обозначим $h^{(1)}_{n,x}(t_k) = h^{(1)}_{n,x,k}$. Тогда систему уравнений (14) можно переписать в виде

$$\left(p^{(1)}_{n,x} - p^{(2)}_{n,x}\right)h^{(1)}_{n,x,K} = \int_0^{t_K} F_{n,x}(t')\exp\left(-p^{(1)}_{n,x}t'\right)dt' + \\ + \omega^2_{n,x}\mu^+_{n,x}\sum_{k=0}^{K-1}\left[h^{(1)}_{n+1,x,k}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt'\exp\left(\left(p^{(1)}_{n+1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right) + \right. \\ \left. + h^{(2)}_{n+1,x,k}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt'\exp\left(\left(p^{(2)}_{n+1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right)\right] + \\ + \omega^2_{n,x}\mu^-_{n,x}\sum_{k=0}^{K-1}\left[h^{(1)}_{n-1,x,k}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt'\exp\left(\left(p^{(1)}_{n-1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right) + \right. \\ \left. + h^{(2)}_{n-1,x,k}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt'\exp\left(\left(p^{(2)}_{n-1,x} - p^{(1)}_{n,x}\right)t'\right)\right], \quad (15)$$

где n = 1, 2, …, N.

Интегралы в правой части (15) равны (s = 1, 2):

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \exp\left(\left(p_{n\pm1,x}^{(s)} - p_{n,x}^{(1)}\right)t'\right) = T_0 \cdot R_{x,n,n\pm1,k}^{(s,1)} =$$

$$T_0 \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{M}, & p_{n\pm1,x}^{(s)} = p_{n,x}^{(1)} \\ \exp\left(\left(p_{n\pm1,x}^{(s)} - p_{n,x}^{(1)}\right)t_k\right) \cdot & p_{n\pm1,x}^{(s)} \neq p_{n,x}^{(1)} \\ \cdot \dfrac{\exp\left(\left(p_{n\pm1,x}^{(s)} - p_{n,x}^{(1)}\right)\Delta t\right) - 1}{T_0\left(p_{n\pm1,x}^{(s)} - p_{n,x}^{(1)}\right)}. & \end{cases} \quad (16)$$

2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПУЧКОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Предположим, что пучок можно описывать кинетическим уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (17)$$

с граничным условием (z = 0)

$$f(t, \vec{r}_\perp, \vec{v}, 0) = f_0(t, \vec{r}_\perp, \vec{v}). \quad (18)$$

Выразим решение кинетического уравнения через решения уравнений движения заряженных частиц (уравнения характеристик)

$$\begin{cases} dt/dz = 1/v_z \\ d\vec{r}_\perp/dz = \vec{v}_\perp/v_z \\ d(\gamma\vec{v})/dz = \vec{F}/mv_z \end{cases} \quad (19)$$

с граничными условиями $t(0) = t_0$, $\vec{r}_\perp(0) = \vec{r}_{\perp,0}$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Тогда

$$\begin{cases} t = t_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0, z\right) \\ \vec{r} = \vec{r}_{\perp,l}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0, z\right) \\ \vec{v} = \vec{v}_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0, z\right) \end{cases} \quad (20)$$

и решение уравнения (17) можно записать в виде

$$f = \int_{-\infty}^{t} dt_0 \int d\vec{r}_{\perp,0} \int d\vec{v}_0\, f_0\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0\right) \frac{v_{z,0}}{v_{z,l}} \times$$
$$\times \delta(t - t_l) \cdot \delta\left(\vec{r}_\perp - \vec{r}_{\perp,l}\right) \cdot \delta\left(\vec{v} - \vec{v}_l\right). \quad (21)$$

Плотность тока пучка будет определяться выражением

$$\vec{j} = \int \vec{v} f d\vec{v} =$$
$$= \int_{-\infty}^{t} dt_0 \int d\vec{r}_{\perp,0} \int d\vec{v}_0\, f_0\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0\right) \frac{v_{z,0}}{v_{z,l}} \vec{v}_l \times \quad (22)$$
$$\times \delta(t - t_l) \cdot \delta\left(\vec{r}_\perp - \vec{r}_{\perp,l}\right).$$

Сделаем некоторые предположения. Во-первых, предположим, что на входе в структуру все частицы имеют одинаковую начальную скорость V_0, направленную вдоль оси z. Если

$$f_0\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, \vec{v}_0\right) = \psi\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}\right)\delta\left(\vec{v}_0 - V_0\vec{e}_z\right), \quad (23)$$

то на входе в структуру ток равен

$$j_{z,0}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, V_0\right) = \psi\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}\right) \cdot V_0. \quad (24)$$

Во-вторых, будем предполагать, что пучок тонкий и время прилета в сечение z, $t_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right)$, не зависит от начальных поперечных координат $\vec{r}_{\perp,0}$: $t_l \equiv t_l\left(t_0, z\right)$. Тогда

$$j_z = \int_{-\infty}^{t} dt_0 \int d\vec{r}_{\perp,0} \cdot j_{z,0}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, V_0\right) \times$$
$$\times \delta\left(t - t_l\left(t_0, z\right)\right) \cdot \delta\left(\vec{r}_\perp - \vec{r}_{\perp,l}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right)\right), \quad (25)$$

и

$$F_{n,x}(t) = \frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}} \int_0^t dt_0 \int d\vec{r}_{\perp,0}\, j_{z,0}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, V_0\right) \times$$
$$\times \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \cdot x_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right) \delta\left(t - t_l\left(t_0, z\right)\right). \quad (26)$$

Перейдем непосредственно к интегрированию пучковой составляющей:

$$I = \int_0^{t_K} F_{n,x}(t') \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t'\right) dt' = \frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}} \int d\vec{r}_{\perp,0} \times$$
$$\times \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \int_0^{t_K} dt' \int_0^{t'} dt_0\, j_{z,0}\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, V_0\right) x_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right) \times \quad (27)$$
$$\times \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t'\right) \delta\left(t' - t_l\left(t_0, z\right)\right).$$

Рассмотрим два внутренних интегрирования. Переставим местами интегрирование по t' и t_0:

$$I = \frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}} \int d\vec{r}_{\perp,0} \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \int_0^{t_K} dt_0\, j_{z,0} \cdot x_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right) \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t_K} dt' \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t'\right) \delta\left(t' - t_l\left(t_0, z\right)\right) =$$
$$= \frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}} \int d\vec{r}_{\perp,0} \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \int_0^{t_K} dt_0\, j_{z,0} \cdot x_l\left(t_0, \vec{r}_{\perp,0}, z\right) \times \quad (28)$$
$$\times \begin{cases} \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t_l\left(t_0, z\right)\right), & t_0 < t_l < t_K \\ 0, & t_l > t_K. \end{cases}$$

Рассмотрим двойной интеграл в (28) по dz и dt_0. Предположим, что уравнение $t_l\left(t_0, z\right) = t$ может быть однозначно решено относительно t_0:

$$t_0 = g\left(t_l, z\right). \quad (29)$$

Из определения t_l следует, что частица, влетевшая в момент времени t_0, в момент времени t_l находится в сечении z. Так как токовый интеграл не равен нулю при $t_K > t_l$, то в момент времени t_K частица должна находиться за сечением z. В токовый интеграл для n–го резонатора могут вносить вклад только те частицы, которые к моменту времени t_K пересекли сечение Z_{n-1}: $Z_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i$. Область интегрирования на плоскости (z, t_0) ограничена двумя вертикальными прямыми Z_{n-1}, Z_n и кривой $t_0 = g\left(t_l, Z_{n-1}\right)$. Очевидно, что $g\left(t_l, Z_n\right) < g\left(t_l, Z_{n-1}\right)$. Тогда получим

$$I=\frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}}\int d\vec{r}_{\perp,0}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\int\limits_0^{g(t_l,Z_n)}dt_0\cdot j_{z,0}\cdot x_l\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right)+\right.\qquad(30)$$
$$\left.+\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\int\limits_{g(t_l,Z_n)}^{g(t_l,Z_{n-1})}dt_0\cdot j_{z,0}\cdot x_l\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right)\right].$$

Первый интеграл определяется частицами, прошедшими через резонатор к моменту времени t_K, второй – находящимися в нем. В дальнейшем нас будет интересовать самосогласованный процесс возбуждения аксиально-несимметричных волн пучками электронов с длительностью импульса, значительно превышающей характерные времена переходных процессов. При этом значения возбуждаемых полей будут определяться частицами, которые были инжектированы в течение длительного времени, много большего времени пролета частиц через систему. В этом случае мы можем пренебречь вторым интегралом в выражении (30). Окончательно получим

$$I=\frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}}\int\limits_0^{g(t_l,Z_n)}dt_0\int d\vec{r}_{\perp,0}\cdot j_{z,0}\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\cdot x_l\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right).\quad(31)$$

Очевидно, что наибольшую трудность в данном подходе вызывает определение функции $g\left(t_l,Z_n\right)$, которая соответствует верхнему пределу интеграла по времени влета в рассматриваемую систему (цепочку связанных резонаторов) тех частиц, которые к моменту времени t_K покинули *n*-й резонатор. Поскольку мы будем исследовать развитие поперечной неустойчивости в линейных ускорителях электронов, то практически на всей длине ускорителя, за исключением короткой начальной части, скорость частиц будет близка к скорости света. Поэтому при определении функции $g\left(t_l,Z_n\right)$ можно считать, что $v_{z,l}=c$. Тогда $t_l=g+Z_n/c$ и граничное значение времени влета равняется

$$g=t_K-Z_n/c\,.\qquad(32)$$

Отметим, что фазовый набег $p_{n,x}^{(1)}\cdot t_l\left(t_0,z\right)$, величина которого оказывает существенное влияние на развитие неустойчивости, будет считаться точно с учетом фазового скольжения за счет изменения скорости на начальном этапе.

Для дальнейшего анализа токового интеграла следует отметить важную особенность уравнений движения. Поскольку поперечная сила (см. выражения 4.1, 4.2) и $t_l\left(t_0,z\right)$ не зависят от поперечных координат, то для заданных времен влета и начальных поперечных смещений имеют место следующие зависимости:

$$x_l\left(t_0,\vec{r}_{\perp,0},z\right)=x_0+x_l\left(t_0,z\right),\qquad(33.1)$$

$$y_l\left(t_0,\vec{r}_{\perp,0},z\right)=y_0+y_l\left(t_0,z\right).\qquad(33.2)$$

Следовательно,

$$\int d\vec{r}_{\perp,0}\cdot j_{z,0}\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\cdot x_l\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right)=$$
$$=\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\cdot\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right)\times$$
$$\times\int d\vec{r}_{\perp,0}\cdot j_{z,0}\cdot\left(x_0+x_l\left(t_0,z\right)\right)=\qquad(34)$$
$$=J_{z,0}\left(t_0\right)\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\cdot\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\right)\left(\left\langle x_0\left(t_0\right)\right\rangle+x_l\left(t_0,z\right)\right),$$

где

$$\left\langle x_0\left(t_0\right)\right\rangle=\frac{\int j_{z,o}\cdot x_0\cdot d\vec{r}_{\perp,0}}{\int j_{z,o}\cdot d\vec{r}_{\perp,0}},\qquad(35.1)$$

$$J_{z,0}\left(t_0\right)=\int j_{z,o}\left(\vec{r}_{\perp,0},t_0,V_0\right)d\vec{r}_{\perp,0}\,.\qquad(35.2)$$

Интегрирование по времени влета можно заменить суммированием. Простейший способ – это метод прямоугольников. Тогда получим

$$\int\limits_0^{t_K-Z_n/c}dt_0J_{z,0}\left(t_0\right)...\approx\sum_{m=1}^{M_K}\Delta t_0J_{z,0}\left(m\Delta t_0\right)...=-\sum_{m=1}^{M_K}q_m...,\quad(36)$$

где $M_K=\left[\dfrac{t_K-Z_n/c}{\Delta t_0}\right]$, [ ] – целая часть.

Таким образом, приходим к понятию макрочастицы с зарядом q_m (для электронов $q_m>0$) и смещением $x_m\left(z\right)$:

$$q_m=-\Delta t_0J_{z,0}\left(t_{0,m}\right),\qquad(37.1)$$

$$x_m\left(z\right)=\left\langle x_0\left(t_{0,m}\right)\right\rangle+x_l\left(t_{0,m},z\right),\qquad(37.2)$$

где $t_{0,m}=m\Delta t_0$.

Итак, получим следующее выражение для токового интеграла:

$$I=-\frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}}\sum_{m=1}^{M_K}q_m\int\limits_{Z_{n-1}}^{Z_n}dz\cdot x_m\left(z\right)\exp\left(-p_{n,x}^{(1)}t_l\left(t_{0,m},z\right)\right).\quad(38)$$

Необходимо отметить, что пучковая составляющая (38) не зависит явно от момента времени t_K. Во-первых, суммирование идет по временам влета частиц в структуру. Во-вторых, не требуется знать конкретный момент времени, когда частица пересекла сечение Z_n. Можно сказать, что значения амплитуд $h_{n,x,K}^{(1)}$ из уравнения (15) не зависят[2] от того, в какой момент времени мы начали учитывать вклад пролетевшей частицы, то есть, при каком *m* мы начали учитывать вклад этой частицы. Это обстоятельство дает возможность учитывать изменение амплитуд за счет токовой составляющей не на каждом шаге по времени Δt, а один раз на некотором временном интервале $p\Delta t$, равном, например, периоду колебаний ускоряющей E_{01}-волны или его части. В течение этого промежутка времени эффекты затухания и распространения еще несущественны. Если θ – это угол пролета частиц через ячейку ускоряющей структуры, то временной интервал, через который учитывается изменение амплитуды в

[2] Предполагается, что токовые интегралы (38) вычислены правильно.

n-м резонаторе за счет токовой составляющей, определяется следующим образом:

$$p\Delta t = \frac{\theta}{2\pi} T_0 , \qquad (39)$$

где T_0 – период колебаний E_{01}-волны.

Учитывая предыдущие рассуждения, перепишем уравнение (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\left(p_{n,x}^{(1)} - p_{n,x}^{(2)}\right) h_{n,x,K}^{(1)} = -\delta_{K,P} \frac{\omega_{n,x}^2}{2cN_{n,x}} \sum_{m=1}^{M_P} q_m \times \\ &\times \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \cdot x_m(z) \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t_l\left(t_{0,m,P}, z\right)\right) + \omega_{n,x}^2 \mu_{n,x}^+ T_0 \times \\ &\times \sum_{k=0}^{K-1} \left[h_{n+1,x,k}^{(1)} R_{x,n,n+1,k}^{(1,1)} + h_{n+1,x,k}^{(2)} R_{x,n,n+1,k}^{(2,1)} \right] + \omega_{n,x}^2 \mu_{n,x}^- T_0 \times \\ &\times \sum_{k=0}^{K-1} \left[h_{n-1,x,k}^{(1)} R_{x,n,n-1,k}^{(1,1)} + h_{n-1,x,k}^{(2)} R_{x,n,n-1,k}^{(2,1)} \right], \end{aligned} \qquad (40)$$

где $n = 1, 2, \ldots, N,$ $\qquad \delta_{K,P} = \begin{cases} 0, & K \neq P \\ 1, & K = P \end{cases},$

$P = p, 2p, 3p, \ldots,$ $t_{0,m,P} = t_{P-1} - Z_n/c + m\Delta t_0$.

Моменты времени, когда учитывается изменение амплитуды в n-м резонаторе за счет пролетевших частиц, соответствуют $t_P = P \cdot \Delta t$. Суммирование по m в (40) проводится по временам влета тех частиц, которые пролетели через резонатор за отрезок времени $t_{P-1} \le t < t_P$: $M_P = \left[p\Delta t / \Delta t_0 \right]$.

Обозначим:

$$X_{l,n,m} = \frac{1}{d_n \cdot r_{nor}} \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} dz \cdot x_m(z) \exp\left(-p_{n,x}^{(1)} t_l\left(t_{0,m,P}, z\right)\right), \qquad (41)$$

где r_{nor} – некоторое нормировочное поперечное смещение.

Введем безразмерную локальную продольную координату:

$$\xi = \begin{cases} z/d_1 , & 0 < z < Z_1 \\ 1 + (z - Z_1)/d_2 , & Z_1 < z < Z_2 \\ \ldots & \\ N - 1 + (z - Z_{N-1})/d_N , & Z_{N-1} < z < Z_N . \end{cases} \qquad (42)$$

Тогда $d(z/d_n) = d\xi$ и не зависит от номера резонатора. Рассмотрим подробнее, как в зависимости от времени ведет себя интеграл по продольной координате, $X_{l,n,m}$. Подставим в (41) выражение для $p_{n,x}^{(1)}$ из (11):

$$X_{l,n,m} = \int_{n-1}^{n} d\xi \, \tilde{x}_m(\xi) \exp\left(\left(\alpha_{n,x} + i\Omega_{n,x}\right) \tau_{l,m}(\xi)\right), \qquad (43)$$

где $\tilde{x}_m(\xi) = x_m(\xi)/r_{nor}$ – эффективное безразмерное смещение, $\tau_{l,m}(\xi) = \omega_0 t_l\left(\tau_{0,m,P}, \xi\right)$ – безразмерное время прилета в сечение ξ, $\tau_{0,m,P} = \omega_0 t_{0,m,P}$ – безразмерное время влета в структуру.

Видно, что подынтегральная функция в уравнении (43) растет экспоненциально с ростом $\tau_{l,m}$. Для устранения этого недостатка введем новую амплитуду:

$$\tilde{h}_{n,x,K}^{(1)} \sim \exp\left(-\alpha_{n,x} \tau_K\right) h_{n,x,K}^{(1)} , \qquad (44)$$

где $\tau_K = \omega_0 t_K$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{l,n,m} &= \exp\left(-\alpha_{n,x} \tau_K\right) X_{l,n,m} = \\ &= \int_{n-1}^{n} d\xi \, \tilde{x}_m(\xi) \exp\left(\alpha_{n,x}\left(\tau_{l,m}(\xi) - \tau_K\right) + i\Omega_{n,x} \tau_{l,m}(\xi)\right). \end{aligned} \qquad (45)$$

Если выполняется условие

$$\left| \alpha_{n,x} \left(\tau_{l,m}(\xi) - \tau_K \right) \right| << 1 , \qquad (46)$$

то

$$\tilde{X}_{l,n,m} \approx \int_{n-1}^{n} d\xi \, \tilde{x}_m(\xi) \exp\left(i\Omega_{n,x} \tau_{l,m}(\xi)\right). \qquad (47)$$

Условие (46) выполняется, так как уже при получении уравнений (40) нами было наложено аналогичное условие.

2.3. ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТОВ

Оставив $\alpha_{n,x}$ только в показателях экспонент, систему уравнений (40) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{n,x,K}^{(1)} &= h_{n,x,K-1}^{(1)} + \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \pi \mu_{n,x}^+ \times \\ &\times \left[h_{n+1,x,K-1}^{(1)} R_{x,n,n+1,K-1}^{(1,1)} + h_{n+1,x,K-1}^{(2)} R_{x,n,n+1,K-1}^{(2,1)} \right] + \\ &+ \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \pi \mu_{n,x}^- \times \\ &\times \left[h_{n-1,x,K-1}^{(1)} R_{x,n,n-1,K-1}^{(1,1)} + h_{n-1,x,K-1}^{(2)} R_{x,n,n-1,K-1}^{(2,1)} \right] - \\ &- \delta_{K,P} \frac{I_{nor} Z_0}{J_0^2\left(\lambda_{1,1}\right)} \frac{r_{nor}}{b_n^2} \cdot \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \sum_{m=1}^{M_P} \frac{q_m}{T_0 I_{nor}} X_{l,n,m} , \end{aligned} \qquad (48)$$

где $n = 1, 2, \ldots, N$; I_{nor} – некоторое нормировочное значение тока.

Введем безразмерную амплитуду:

$$\tilde{h}_{n,x,K}^{(1)} = \left(\frac{I_{nor} Z_0}{r_{nor}} \right)^{-1} \exp\left(-\alpha_{n,x} \tau_K\right) h_{n,x,K}^{(1)} . \qquad (49)$$

Тогда систему уравнений (48) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{n,x,K}^{(1)} &= \tilde{h}_{n,x,K-1}^{(1)} \exp\left(-\alpha_{n,x} \Delta\tau\right) + \\ &+ \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \pi \mu_{n,x}^+ \cdot \exp\left(-\alpha_{n+1,x} \Delta\tau\right) \times \\ &\times \left[\tilde{h}_{n+1,x,K-1}^{(1)} \tilde{R}_{x,n,n+1,K-1}^{(1,1)} + \tilde{h}_{n+1,x,K-1}^{(2)} \tilde{R}_{x,n,n+1,K-1}^{(2,1)} \right] + \\ &+ \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \pi \mu_{n,x}^- \cdot \exp\left(-\alpha_{n-1,x} \Delta\tau\right) \times \\ &\times \left[\tilde{h}_{n-1,x,K-1}^{(1)} \tilde{R}_{x,n,n-1,K-1}^{(1,1)} + \tilde{h}_{n-1,x,K-1}^{(2)} \tilde{R}_{x,n,n-1,K-1}^{(2,1)} \right] - \\ &- \frac{i\omega_{n,x}^2}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0} \frac{r_{nor}^2}{b_n^2 J_0^2\left(\lambda_{1,1}\right)} \sum_{m=1}^{M_P} \frac{q_m}{T_0 I_{nor}} \tilde{X}_{l,n,m} , \end{aligned} \qquad (50)$$

где $\Delta\tau = \omega_0 \cdot \Delta t$ и

$$\tilde{R}^{(1,1)}_{x,n,n\pm1,K-1} = \exp\left(\tau_K\left(\alpha_{n\pm1,x}-\alpha_{n,x}\right)\right)R^{(1,1)}_{x,n,n\pm1,K-1} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}, & p^{(1)}_{n\pm1,x} = p^{(1)}_{n,x} \\ \dfrac{\exp\left(i\tau_K\left(\Omega_{n,x}-\Omega_{n\pm1,x}\right)\right)}{2\pi\left(\alpha_{n,x}-\alpha_{n\pm1,x}+i\left(\Omega_{n,x}-i\Omega_{n\pm1,x}\right)\right)}- \\ -\dfrac{\exp\left(i\tau_{K-1}\left(\Omega_{n,x}-\Omega_{n\pm1,x}\right)+\Delta\tau\left(\alpha_{n\pm1,x}-\alpha_{n,x}\right)\right)}{2\pi\left(\alpha_{n,x}-\alpha_{n\pm1,x}+i\left(\Omega_{n,x}-i\Omega_{n\pm1,x}\right)\right)}, & p^{(1)}_{n\pm1,x} \neq p^{(1)}_{n,x}, \end{cases}$$

$$\tilde{R}^{(2,1)}_{x,n,n\pm1,K-1} = \exp\left(\tau_K\left(\alpha_{n\pm1,x}-\alpha_{n,x}\right)\right)R^{(2,1)}_{x,n,n\pm1,K-1} =$$

$$\frac{\exp\left(i\tau_K\left(\Omega_{n\pm1,x}+\Omega_{n,x}\right)\right)}{2\pi\left(\alpha_{n,x}-\alpha_{n\pm1,x}+i\left(\Omega_{n\pm1,x}+\Omega_{n,x}\right)\right)}-$$

$$-\frac{\exp\left(i\tau_{K-1}\left(\Omega_{n\pm1,x}+\Omega_{n,x}\right)+\Delta\tau\left(\alpha_{n\pm1,x}-\alpha_{n,x}\right)\right)}{2\pi\left(\alpha_{n,x}-\alpha_{n\pm1,x}+i\left(\Omega_{n\pm1,x}+\Omega_{n,x}\right)\right)}.$$

Аналогичные уравнения можно легко получить и для y-поляризации: $x \to y$.

Алгоритм расчетов выглядит следующим образом. Производится расчет изменения амплитуд за счет эффектов распространения и затухания колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(1)}_{n,x,K} &= \tilde{h}^{(1)}_{n,x,K-1}\exp\left(-\alpha_{n,x}\Delta\tau\right)+ \\ &+\frac{i\omega^2_{n,x}}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0}\pi\mu^+_{n,x}\cdot\exp\left(-\alpha_{n+1,x}\Delta\tau\right)\times \\ &\times\left[\tilde{h}^{(1)}_{n+1,x,K-1}\tilde{R}^{(1,1)}_{x,n,n+1,K-1}+\tilde{h}^{(2)}_{n+1,x,K-1}\tilde{R}^{(2,1)}_{x,n,n+1,K-1}\right]+ \\ &+\frac{i\omega^2_{n,x}}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0}\pi\mu^-_{n,x}\cdot\exp\left(-\alpha_{n-1,x}\Delta\tau\right)\times \\ &\times\left[\tilde{h}^{(1)}_{n-1,x,K-1}\tilde{R}^{(1,1)}_{x,n,n-1,K-1}+\tilde{h}^{(2)}_{n-1,x,K-1}\tilde{R}^{(2,1)}_{x,n,n-1,K-1}\right], \end{aligned} \quad (51)$$

где n = 1, 2, …, N.

При $K = P$ производится расчет уравнений движения, и по формуле (47) вычисляются интегральные смещения $\tilde{X}_{l,n,m}$. После этого находятся новые значения амплитуд:

$$\tilde{h}^{(1)}_{n,x,P} = \tilde{h}^{(1)}_{n,x,P} - \frac{i\omega^2_{n,x}}{\tilde{\omega}_{n,x}\omega_0}\frac{r^2_{nor}}{b^2_n J^2_0\left(\lambda_{1,1}\right)}\sum_{m=1}^{M_P}\frac{q_m}{T_0 I_{nor}}\tilde{X}_{l,n,m}, \quad (52)$$

где n = 1, 2, …, N.

Затем вновь повторяются расчеты по уравнениям (51) и т.д.

Расчет системы уравнений (52) не представляет большой сложности, если определена процедура расчета интегральной величины $\tilde{X}_{l,n,m}$. Очевидно, что система уравнений для амплитуд полей в резонаторах должна быть дополнена уравнениями движения частиц.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Перейдем к описанию поперечного движения частиц. Мы предполагаем, что продольное движение частиц происходит вне зависимости от их поперечного движения. Это значит, что время прилета частицы в точку с координатой ξ, t_l, и продольная составляющая скорости, $v_{z,l}$, определяются только динамикой движения в ускоряющем поле. Релятивистский фактор зависит только от продольной составляющей скорости: $\gamma_l = 1\Big/\sqrt{1-\beta_l^2}$, $\beta_l = v_{z,l}/c$. Уравнения поперечного движения с учетом наличия двух собственных колебаний и при наличии внешнего магнитного поля $\vec{B}_0 = \vec{e}_z B_0$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{x,l}}{d\left(z/d_n\right)} = -\dfrac{|e|d_n}{2mc^2}\mathcal{H}_{n,x} - \Omega_B\dfrac{\theta_n}{\gamma_l\beta_l}q_{y,l} \\ \dfrac{d\tilde{x}_l}{d\left(z/d_n\right)} = \dfrac{d_n}{r_{nor}}\dfrac{q_{x,l}}{\gamma_l\beta_l} \\ \dfrac{dq_{y,l}}{d\left(z/d_n\right)} = -\dfrac{|e|d_n}{2mc^2}\mathcal{H}_{n,y} + \Omega_B\dfrac{\theta_n}{\gamma_l\beta_l}q_{x,l} \\ \dfrac{d\tilde{y}_l}{d\left(z/d_n\right)} = \dfrac{d_n}{r_{nor}}\dfrac{q_{y,l}}{\gamma_l\beta_l}, \end{cases} \quad (53)$$

где $q_{x,l} = \gamma_l \cdot v_{x,l}/c$, $q_{y,l} = \gamma_l \cdot v_{y,l}/c$, $\tilde{x}_l = x_l/r_{nor}$, $\tilde{y}_l = y_l/r_{nor}$ – безразмерные переменные, $\Omega_B = \dfrac{|e|B_0}{m\omega_0}$, $\theta_n = \dfrac{\omega_0 d_n}{c}$.

Из выражения (9), принимая во внимание условие (46), следует, что

$$\mathcal{H}_{n,x} \approx \frac{I_{nor}Z_0}{r_{nor}}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left(\tilde{h}^{(1)}_{n,x}\exp\left(-i\Omega_{n,x}\tau_l\right)\right), \quad (54.1)$$

$$\mathcal{H}_{n,y} \approx \frac{I_{nor}Z_0}{r_{nor}}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left(\tilde{h}^{(1)}_{n,y}\exp\left(-i\Omega_{n,y}\tau_l\right)\right). \quad (54.2)$$

Если сделать предположение, что за время пролета частицы через отдельный резонатор амплитуда поля не изменяется, то вычисление $\tilde{x}_l$, $\tilde{y}_l$ в n-м резонаторе можно проводить при постоянной амплитуде, взятой в момент времени t_{P-1}, предшествующий моменту учета вклада пролетевших частиц t_P. Уравнения движения нужно решать для макрочастиц с временами влета в структуру $t_{P-1} - Z_n/c \le t_{0,m,P} < t_P - Z_n/c$. Тогда уравнения движения частиц в n-м резонаторе будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{x,l,m}}{d\xi} = -\sigma_n\,\mathrm{Re}\left(\tilde{h}^{(1)}_{n,x,P-1}\exp\left(-i\Omega_{n,x}\tau_l\right)\right)- \\ -\Omega_B\dfrac{\theta_n}{\gamma_l\beta_l}q_{y,l,m} \\ \dfrac{d\tilde{x}_{l,m}}{d\xi} = \dfrac{d_n}{r_{nor}}\dfrac{q_{x,l,m}}{\gamma_l\beta_l} \\ \dfrac{dq_{y,l,m}}{d\xi} = -\sigma_n\,\mathrm{Re}\left(\tilde{h}^{(1)}_{n,y,P-1}\exp\left(-i\Omega_{n,y}\tau_l\right)\right)+ \\ +\Omega_B\dfrac{\theta_n}{\gamma_l\beta_l}q_{x,l,m} \\ \dfrac{d\tilde{y}_{l,m}}{d\xi} = \dfrac{d_n}{r_{nor}}\dfrac{q_{y,l,m}}{\gamma_l\beta_l}, \end{cases} \quad (55)$$

где $\sigma_n = \frac{|e|\, d_n}{mc^2} \cdot \frac{I_{nor} Z_0}{r_{nor}}$.

Безразмерный коэффициент σ_n можно записать в таком виде:

$$\sigma_n = \frac{I_{nor} d_n}{r_{nor}} \cdot \frac{1.2\pi}{5.11} 10^{-3} . \qquad (56)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе разработанной математической модели в среде FORTRAN написан ряд программ, позволяющих моделировать процесс развития поперечной неустойчивости как в одиночной структуре, так и в многосекционном ускорителе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. P.B. Wilson. High energy electron linacs: applications to storage ring rf systems and linear colliders // *SLAC-pub-2884*. 1991.
2. P.B. Wilson. Electron linacs for high energy physics // *Reviews of Accelerator Sciences and Technologies*. Editors: A.W. Chao, W. Chou. World Scientific. 2008, p.7-42.
3. P.M. Lapostolle, A.L. Septier. *Linear accelerators*. Amsterdam: «North-Holland Publ. Co». 1970, p.173-221.
4. В.И. Курилко. Устойчивость модулированного пучка в волноводе, нагруженном дисками // *ЖТФ*. 1968, т.38, №1, с.118-128.
5. R.L. Gluckstern, R.K. Cooper, P.J. Channell. Cumulative beam breakup in RF LINACs *// Particle Accelerators.* 1985, v.16, №3, p.125-153.
6. R.L. Gluckstern, F. Neri. Beam breakup with coupling between cavities *// Particle Accelerators.* 1989, v.25, №1, p.11-41.

Статья поступила в редакцию 06.10.2011 г.

SIMULATION OF TRANSVERSE INSTABILITY OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAMS IN INHOMOGENEOUS SLOW WAVE STRUCTURES

M.I. Ayzatskiy, K.Yu. Kramarenko

The results of development of new mathematical model of electron beam transverse instability in slow wave structures that can be considered as the chains of coupled cavities are presented. Developed model permits to simulate electron beam self-consistent transverse dynamics more precisely, taking into account both the multi-frequency structure of axially nonsymmetrical oscillations of inhomogeneous slow wave structure, and complicated character of particle transverse motion in that fields.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОПЕРЕЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ В НЕОДНОРІДНИХ УПОВІЛЬНЮЮЧИХ СТРУКТУРАХ

М.І. Айзацький, К.Ю. Крамаренко

Приведені результати розробки нової математичної моделі поперечної нестійкості електронних пучків в уповільнюючих структурах, що є ланцюжками зв'язаних резонаторів. Розроблена модель дозволяє моделювати самоузгоджену поперечну динаміку електронних пучків з урахуванням як багаточастотної структури аксіально-несиметричних коливань неоднорідної уповільнюючої структури, так і складного характеру поперечного руху частинок пучка в таких полях.